

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Péter, Rózsa:** Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. *Math. Ann.* **110**, 612—632 (1934).

Eine Rekursionsdefinition heißt primitiv, wenn sie der Form

$$\Phi(0, a) = \alpha(a); \quad \Phi(n+1, a) = \beta(n, a, \Phi(n, a))$$

ist, wo  $\alpha$  und  $\beta$  schon bekannte Funktionen sind; sie heißt eine Wertverlaufsrekursion, wenn zur Bestimmung des Wertes von  $\Phi(n+1, a)$  nicht nur der Wert von  $\Phi(n, a)$ , sondern auch die Werte von  $\Phi(k, a)$  für mehrere (vielleicht alle)  $k \leq n$  erforderlich sind; sie heißt eine eingeschachtelte Rekursion, wenn bei der Bestimmung von  $\Phi(n+1, a)$  Einsetzungen für den Parameter  $a$  erfolgen können, wie z. B. in der Formel

$$\Phi(n+1, a) = \beta(n, a, \Phi(n, y(n, a, \Phi(n, a)))).$$

Das Hauptergebnis dieses Aufsatzes ist das folgende: Jede aus den Ausgangsfunktionen 0 und  $n+1$  durch Einsetzungen und Rekursionen der drei obengenannten Arten (einschließlich deren die zugleich Wertverlaufs- und eingeschachtelte Rekursionen sind) entstehende Funktion läßt sich durch Einsetzungen und primitive Rekursionen allein aufbauen. Auch wird gezeigt, daß man im allgemeinsten Falle mit nur einem Parameter auskommen kann. Was die Wertverlaufsrekursion betrifft, so wird der Beweis nur für spezielle Typen durchgeführt; er kann aber auf diejenigen Rekursionen verallgemeinert werden, worin die Bestimmungsgleichung für  $\Phi(n+1, a)$  die folgende Form hat:

$$\Phi(n+1, a) = f_n(n, a, \Phi(0, a), \Phi(1, a), \dots, \Phi(n, a)),$$

wo die  $f_i$  eine derartige Folge von Funktionen ist, daß für eine beliebige rekursive — d. h. durch primitive Rekursionen und Einsetzungen entstehende — Funktion  $\lambda(n, a)$  die Funktion

$$u(n, a, b) = f_n(n, a, \lambda(0, b), \lambda(1, b), \dots, \lambda(n, b))$$

auch eine rekursive Funktion ist. Die Arbeit setzt keinerlei besondere Vorkenntnisse voraus, und die notwendigen zahlentheoretischen Funktionen werden explizit aufgestellt. (Auf der Seite 624 gibt es einen sinnstörenden Druckfehler: In der letzten Zeile sollen die Argumente  $b_1, b_2, \dots, b_{\lambda-1}$  in ihrer natürlichen statt in der umgekehrten Anordnung erscheinen.)

*H. B. Curry* (Pennsylvania).

**Diamond, A. H.:** Simplification of the Whitehead-Huntington set of postulates for the algebra of logic. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 599—601 (1934).

Stellt man in dem ersten der Whitehead-Huntingtonschen Axiomensysteme für die Algebra der Logik (*Trans. Amer. Math. Soc.* **5**, 288) die distributiven Gesetze in einer auf bestimmte Weise kommutierten Form als Axiome auf, so werden die kommutativen Gesetze als Axiome überflüssig. Diese Reduktion zusammen mit einer von B. A. Bernstein gegebenen (*Bull. Amer. Math. Soc.* **22**, 458) führt auf ein Axiomensystem für die Algebra der Logik, das dem Whitehead-Huntingtonschen äquivalent ist und wie dieses zwei binäre Operationen definiert, aber nur aus 6 — voneinander unabhängigen — Axiomen besteht.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Bernstein, B. A.:** A set of four postulates for Boolean algebra in terms of the „implicative“ operation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36**, 876—884 (1934).

Es wird folgendes Axiomensystem für die Implikation  $\supset$  aufgestellt (wo  $K$  eine Klasse bezeichnet, = „an idea outside the system“ darstellt):  $a \supset b$  is an element of  $K$  whenever  $a$  and  $b$  are elements of  $K$ .  $(a \supset b) \supset a = a$ . There is an element  $z$  such that  $(d \supset d) \supset [(a \supset b) \supset c] = \{[(c \supset z) \supset a] \supset [(b \supset c) \supset z]\} \supset z$ .  $K$  consists of at least two distinct elements. — Die Axiome werden als verträglich und von-



einander unabhängig erwiesen. Der Nachweis, daß sie ein Axiomensystem für die Boolesche Algebra bilden, besteht in dem Beweis, daß einerseits aus ihnen [bei Def.  $a/b = b \supset (a \supset z)$ ] die Axiome des Verf. für die Unverträglichkeitsrelation (Simplification of the set of four postulates for Boolean algebras in terms of rejection. Bull. Amer. Math. Soc. 39; dies. Zbl. 8, 97), andererseits aus diesen Unverträglichkeitsaxiomen (bei Def.  $a \supset b = a/b$ ) die oben angegebenen Implikationsaxiome folgen. Weiter werden die Beziehungen zur „theory of deduction“ der Principia Mathematica und zu des Verf. Axiomensystem für die exception-Relation (Univ. California Publ. Math. 1) betrachtet. Arnold Schmidt (Göttingen).

Curry, H. B.: Functionality in combinatory logic. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 584—590 (1934).

Der Funktionsbegriff wird in die kombinatorische Logik des Autors (u. a. Amer. J. Math. 52; s. a. dies. Zbl. 1, 261) — jenen logischen Formalismus, in dem gewisse sonst als grundlegend angenommene Prozesse wie die Substitution auf einfachere (kombinatorische) Prozesse zurückgeführt sind, wobei eine explizite Unterscheidung von Gattungen vermieden wird — eingeführt. Zunächst werden die Zeichen  $F_n$  ( $n = 1, \dots$ ) rekursiv definiert, wo  $F (= F_1)$  in folgender Weise interpretiert ist:  $FXY$  represents the category of functions on  $X$  to  $Y$ , while the formula  $\vdash FXYf$  represents the statement that  $f$  belongs to that category. Sodann werden einige Axiome aufgestellt, die die neuen „entities“  $F, F_2$  mit den grundlegenden individuellen entities  $B, C, W, K$  und den Abkürzungssymbolen  $\supset, P^*$  verknüpfen. Als letztes Axiom  $F\Pi$  erscheint eine Formel, in der die (früher von Curry in Ann. of Math. 34, 398 nur heuristisch herangezogene) entity  $\text{Pr}$  auftritt; „ $\text{Pr}$  stands for ‚proposition‘, which ... is to be interpreted as that which is either true or false“. Der Autor hebt hervor, daß dieses Axiom „is of a somewhat more dubious character than the others“. — Bei Gleichsetzung von  $Fxyz$  mit dem Ausdruck  $[x, y, z](u)(xu \supset y(zu))$  werden die Funktionsaxiome mit Ausnahme von  $F\Pi$  aus den Implikationsaxiomen (Curry, Ann. of Math. 35, 850) beweisbar. — C. gibt einige wichtige Folgerungen aus den Funktionsaxiomen an, vor allem das ohne  $F\Pi$  herleitbare „general substitution theorem“, welches die Einsetzung von Funktionen für die unabhängigen Variablen einer Funktion betrifft. In dem gewonnenen Formalismus werden weiter einige Paradoxien behandelt; zum Zustandekommen der Russellschen Paradoxie wäre dabei die „illegitimate“ Formel  $\vdash FE\text{Pr}N$  (wo  $E$  die Kategorie der entities,  $N$  die Negation bezeichnet) nötig, zum Zustandekommen der Paradoxie des Epimenides die „preposterous“ Formel  $\vdash F\text{PrPr}\Phi$  (wo  $\Phi$  die dieser Paradoxie zugrunde liegende Eigenschaft ist). — Abschließend wird das Verhältnis der kombinatorischen Logik zu anderen logischen Theorien gestreift. Zur Präzisierung der Zermeloschen „definiten Eigenschaft“ wird vorgeschlagen:  $f$  shall be definite over  $M$  when and only when  $\vdash FM\text{Pr}f$ . Schmidt (Göttingen).

● Popper, Karl: Logik der Forschung zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft. (Sehr. z. wiss. Weltauffassung. Hrsg. v. Philipp Frank u. Moritz Schlick. Bd. 9.) Wien: Julius Springer 1935. VI, 248 S. RM. 13.50.

Die Monographie ist einer logischen Analyse der empirisch-wissenschaftlichen Forschungsmethode gewidmet. Der induktionslogische Standpunkt wird von vornherein als diesem Zweck ungeeignet erklärt und systematisch abgelehnt, weil die empirische Induktion keine logische Kraft hat. Sätze und Theorien der empirischen Wissenschaft können durch ein Experiment niemals verifiziert, wohl aber „falsifiziert“ (widerlegt) werden. Die experimentelle Falsifikationsmöglichkeit wird daher zum Abgrenzungskriterium der empirischen Wissenschaft gewählt, und die eingehende logische Analyse der Falsifizierbarkeit (insbesondere ihrer möglichen Gradationen) gewinnt ausschlaggebende Bedeutung für die Methodologie der empirischen Wissenschaft. Die große Rolle, die in der modernen Wissenschaft den Wahrscheinlichkeitsaussagen zukommt, erfordert eine besondere detaillierte Untersuchung dieser Aussagen vom eingestrichenen Standpunkt. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind niemals falsifizierbar, können jedoch unter Annahme bestimmter methodologischer Regeln als falsifizierbare Sätze gebraucht werden, wodurch allein ihre Anwendbarkeit in der empirischen Wissenschaft möglich wird. — Ein wesentlicher Teil der Schrift ist den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet. Verf. erblickt den einzigen Weg zur objektiven (objektiv bedeutet gemäß dem ver-



tretenen erkenntnistheoretischen Standpunkt soviel wie intersubjektiv) Begründung in der Häufigkeitstheorie; die bekannten Einwände gegen die v. Misessche Form dieser Theorie werden anerkannt, und es wird deswegen eine Abänderung dieser Form vorgeschlagen und im einzelnen durchgeführt; die Regellosigkeitsforderung wird wesentlich gemildert, indem an ihre Stelle diejenige der „Nachwirkungsfreiheit“ tritt, wodurch die Konstruktion mathematischer Modelle für Kollektive im erweiterten Sinn ermöglicht wird. Ferner wird die Forderung der Existenz der Häufigkeitsgrenzwerte ebenfalls durch eine schwächere ersetzt (der Zweck und der logische Effekt dieser letzten Abänderung sind dem Ref. allerdings unverständlich geblieben). — Ein spezielles Kapitel enthält eine Diskussion der Grundlagen der Quantenmechanik, insbesondere der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen; nach Ansicht des Verf. verschwindet die Mehrzahl der mit diesen verbundenen Schwierigkeiten, falls man sie statistisch deutet; im Gegenteil soll ihre übliche, sich auf ein individuelles Teilchen beziehende Deutung nicht nur willkürlich, sondern den Prinzipien, aus denen die Relationen abgeleitet zu werden pflegen, direkt widersprechend sein.

A. Khintchine (Moskau).

**Lasareff, P. P.:** Les problèmes actuels de la biophysique et leur signification pratique. Scientia 57, 37—52 (1935).

Nach kurzer Übersicht und Gebietseinteilung der Biophysik Besprechung der Adaptationsphänomene, ausgehend von der Dunkeladaptation des Auges. Eine einfache Vorstellung betreffs des zugrundeliegenden Chemismus ermöglicht eine mathematische Analyse des empirischen Zeitverlaufs der Empfindlichkeit der visuellen Zentren während des Lebensablaufs. Die sich ergebenden Resultate haben eine sehr allgemeine Gültigkeit und erlauben eine Fülle interessanter Folgerungen, z. B. betreffs der Lebensdauer der Organismen, für die auf Grund dieser Vorstellungen chemische Beeinflussungen möglich werden. Weiterhin wird der Setchenoweffekt (quantitativ faßbare Verstärkung reflektorischer Tätigkeit durch Abschwächung der mitbeteiligten Gehirntätigkeit und umgekehrt) erörtert und seine Bedeutung für Physiologie und Pathologie gezeigt.

P. Jordan (Rostock).

● **Renaud, Paul:** Structure de la pensée et définitions expérimentales. (Actualités scient. et industr. Nr. 173. Exposés de philos. des sci. Publiés par L. de Broglie. II.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 24 S. Frs. 7.—

## Geschichtliches.

**Bortolotti, Ettore:** Sulla risoluzione della equazione cubica in Babilonia. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. s. 1, 81—94 (1934).

Ähnlich wie schon Vogel (vgl. dies. Zbl. 9, 97) tritt Verf. für eine geometrische Interpretation ein.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Robbins, Frank Egleston:** Greco-Egyptian arithmetical problems: P. Mich. 4966. Isis 22, 95—103 (1934).

**Karpinski, Louis C.:** Importance of the Greek algebraical problems. Isis 22, 104—105 (1934).

Es wird ein neuer, allerdings sehr fragmentierter Papyrus etwa des 2. Jahrh. n. Chr. übersetzt und kommentiert. Er enthält eine Bruchrechnungstabelle und einfache Aufgaben der Wirtschaftsrechnungen, wie sie aus anderen Mich.-Pap., aus dem Achmim-Pap. und dem Wiener Pap. (dies. Zbl. 4, 193) bekannt sind und dem Diophant-Heronischen Schriftenkreis nahestehen.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

● **Mondolfo, Rodolfo:** L'infinito nel pensiero dei Greci. Studi filosofici. II. s., X. Firenze: Felice Le Monnier 1934. 439 S. L. 40.—

Daß „possa risultare definitivamente sfatata la leggenda di una refrattarietà del genio ellenico alla comprensione dell'infinito, e messa in luce l'importanza del contributo recato dai Greci allo sviluppo delle dottrine scientifiche, filosofiche e religiose dell'infinità“, ist der Wunsch des Buches (Vorw.). In diesem Rahmen spielt selbstverständlich auch die Entwicklung der mathematischen Ideenbildungen (Atomismus, Exhaustion) eine Rolle und wird daher in einem eigenen Kapitel (II) behandelt (Kap. I Vorgeschichte, II L'infinità del tempo è l'eternità, IV Universo e spazio, potenza universale divina). Der Tendenz des Buches entsprechend wird besonderes Gewicht auf das Auftreten von Unendlichkeitsbegriffen gelegt, während man es vom Standpunkt der Gesch. d. Math. eher erwarten müßte, die allmähliche Befreiung von solchen unstrengen Begriffsbildungen geschildert zu sehen. Die zentrale Schwierigkeit liegt



eben darin, daß es einen „*spirito greco*“ wohl ebensowenig gibt wie einen „*spirito moderno*“ und daß z. B. die geistigen Strömungen auf religiösem oder philosophischem Gebiet gänzlich anders verlaufen können als auf mathematischem. — Das Buch ist mit großer Literatur- und Quellenkenntnis geschrieben und steht in ständiger Berührung und Auseinandersetzung mit E. Franks „*Plato und die sog. Pythagoreer*“.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Klein, Jacob:** *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra. I. Tl. Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 18—105 (1934).*

Ausgangspunkt des Verf. ist der Tatbestand, daß es in der modernen mathematischen Physik unmöglich ist, den Gehalt der Theorien von ihrer Form zu trennen, die sich im Gebrauch der symbolischen Formelsprache der Mathematik manifestiert. Der Wunsch, diese Erscheinung zu verstehen, führt den Verf. zu der Frage nach der Entstehung eben dieser symbolischen Formelsprache selbst. Indem er in der Einleitung die Fäden der mathematischen Ideenbildung mit ihrer Problematik rückwärts verfolgt, wird er genötigt, bis in die platonische Zeit zurückzugehen. Der vorliegende erste Teil der Untersuchung behandelt die philosophische Problematik der Arithmetik und Logistik bei den Griechen in der Zeit vor Diophant; jedoch werden auch die Neuplatoniker gleich im Zusammenhange mit Platon selbst besprochen. Es ist völlig unmöglich, von der auf gründlichster Kenntnis und sorgfältigster Interpretation der Quellen beruhenden und an neuen Einsichten reichen Untersuchung in dem knappen hier verfügbaren Raum auch nur annähernd eine Vorstellung zu geben. Es sei aber hervorgehoben, daß die glänzende Darstellungsweise des Verf. es dem Leser so leicht wie möglich macht, sich durch die ungeheure Fülle des verwickelten Stoffes hindurchzufinden.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Junge, Gustav:** *Das Fragment der lateinischen Übersetzung des Pappus-Kommentars zum 10. Buche Euklids. (Nr. 7377 A, Fol. 68—70 der Bibliothèque Nationale zu Paris.) Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 1—17 (1934).*

Außer der arabischen Handschrift, die von Junge-Thomson 1930 ediert wurde, existiert noch eine lateinische, die jedoch nicht den ganzen Text des Pappus-Kommentars, sondern nur den Anfang (etwa  $\frac{1}{6}$  des Ganzen) enthält. Der lateinische Text ist ebenfalls aus dem Arabischen übersetzt, jedoch nicht aus der uns erhaltenen Handschrift, so daß er selbständigen Quellenwert erhält. Der Übersetzer ist unbekannt; Junge erwägt, ob es Gerhard von Cremona gewesen sein könne. Die vorliegende Arbeit enthält einen Abdruck des lateinischen Textes mit einer Einleitung von J. und den zum Verständnis nötigen Anmerkungen.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Lindemann, F.:** *Zur Geschichte der Polyeder. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1934, 265—275.*

Ergänzungen der Materialsammlung zu der bekannten Arbeit „Zur Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen“ [S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 26 (1896)].

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Candido, G.:** *Pappo, Fagnano, Stewart, Chasles (coincidenze, priorità, generalizzazioni). Period. Mat., IV. s. 15, 58—62 (1935).*

**Zinner, Ernst:** *Die fränkische Sternkunde im 11. bis 16. Jahrhundert. 27. Ber. u. Festber. z. hundertjährig. Bestehen d. naturforsch. Ges. in Bamberg, 1—118 (1934).*

● **Wigodski, M.:** *Galilei und die Inquisition. Tl. 1. Verbot der pythagoreischen Lehre. Moskau u. Leningrad: Staatl. techn.-theoret. Verl. 1934. 216 S. [Russisch].*

**Osieka, Herbert:** *Der Raum- und Zeitbegriff bei Newton. Breslau: Diss. 1934. 91 S.*

**Petronievics, Braanislaw:** *Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation. Isis 22, 69—76 (1934).*

## Algebra und Zahlentheorie.

**Padoa, Alessandro:** *Sull'impossibilità di estendere il corpo dei numeri complessi ordinari. Period. Mat., IV. s. 15, 63—64 (1935).*



**Susechkewitsch, A.:** Über ein Elementensystem mit zwei Operationen, für welche zwei Distributivgesetze gelten. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 29—31 (1934).

Es wird ein Axiomensystem für eine Algebra betrachtet, die aus der Booleschen durch Fortlassung der Negation entsteht, d. h. es gibt in der Algebra zwei kommutative und assoziative Operationen mit Einheitselement, und es gilt  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ,  $(a \cdot b) + c = (a+c) \cdot (b+c)$ . Als Beispiele dienen Systeme ganzer bzw. reeller Zahlen mit Bildung des größten gemeinsamen Teilers und kleinsten gemeinsamen Vielfachen bzw. Bildung des Maximums und Minimums zweier Zahlen als Addition und Multiplikation.

*Magnus* (Princeton).

**Dieudonné, J.:** Sur une équation quadrinôme. *Mathematica*, Cluj 10, 37—45 (1935).

Verf. hat in einer Arbeit (Ann. École norm. 48, 282—285; dies. Zbl. 3, 119) für die Bestimmung der Anzahl der im Einheitskreise  $K$  liegenden Nullstellen von  $1 + z^{2p} - 2z^p \Phi(z)$  eine Regel gegeben, wenn  $\Phi(z)$  im Innern und am Rande von  $K$  eine meromorphe Funktion ist. Durch Anwendung dieser Regel auf das Polynom  $P(z) = 1 + az^p + z^{2p} + bz^n$  ( $n > 2p$ ) läßt sich die Anzahl der in  $K$  liegenden Nullstellen von  $P(z)$  als Funktion der Koeffizienten  $a$  und  $b$  bestimmen. So ergibt sich der Satz: Die quadrinomische Gleichung  $P(z) = 0$  hat für jeden Wert der Koeffizienten  $a$  und  $b$  mindestens  $p-1$  Wurzeln in  $K$ . Aus den Resultaten des Verf. lassen sich die Formeln von Bohl (Math. Ann. 65, 556) leicht ableiten. *Sz. Nagy*.

**Popoviciu, Tiberiu:** Sur un théorème de Laguerre. *Mathematica*, Cluj 10, 128—131 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 10, 51.

**Brauer, Richard:** Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. *Math. Ann.* 110, 473—500 (1934).

Ist eine endliche lineare oder Kollineationsgruppe  $\mathcal{G}$  gegeben, so besteht das Kleinsche Formenproblem in der Auffindung der Koordinatenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bei gegebenen Werten der Invarianten der Gruppe  $\mathcal{G}$ . Ist außerdem eine Gleichung gegeben, deren Gruppe mit  $\mathcal{G}$  isomorph ist, so beschäftigt sich der Verf. mit der Aufgabe, welche akzessorische Irrationalitäten man zum Integritätsbereich adjungieren muß, damit die Auflösung dieser Gleichung auf das Formenproblem zurückführbar sei. Man muß also rationale Funktionen der Wurzeln aufstellen, die bei Substitutionen der Galoisschen Gruppe die Transformationen von  $\mathcal{G}$  erleiden. — Der Verf. beweist: Ist  $\mathcal{G}$  ganz linear, so geschieht diese Zurückführung, indem man zum Rationalitätsbereich bloß die Koeffizienten von  $\mathcal{G}$  adjungiert. Ist dagegen  $\mathcal{G}$  eine gebrochene (Kollineations-) Gruppe, so sind dafür akzessorische Irrationalitäten notwendig. Die Darstellbarkeit einer Gruppe durch gebrochene lineare Transformationen ist mit ihrer Darstellbarkeit durch lin. hom. Transformationen mit sog. Faktorensystemen (vgl. J. Schur, J. reine angew. Math. 127) äquivalent. Den Faktorensystemen dieser Art entsprechen aber gewisse einfache normale Algebren (= hyperkomplexe Systeme). Es erweist sich, daß die für die Lösung des behandelten Problems notwendigen Erweiterungskörper gerade die Zerfällungskörper dieser Algebren sind. Dies Ergebnis in Verbindung mit dem berühmten R. Brauer-H. Hasse-E. Noetherschen Resultat (vgl. dies. Zbl. 3, 244) gibt einen genauen Einblick über die Natur der akzessorischen Irrationalitäten.

*N. Tschebotarow* (Kasan).

**Ramamurti, R.:** A geometric interpretation of a theorem on skew symmetric functions. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 37, 802—805 (1934).

R. Weitzenböck hat [Rend. Circ. mat. Palermo 33, 1—10 (1912)] die Bedingung dafür aufgestellt, daß ein schiefssymmetrisches Polynom  $K(s, t)$  sich auf die Gestalt

$$K(s, t) = \sum_1^r \{ \varphi_k(s) \psi_k(t) - \varphi_k(t) \psi_k(s) \}$$

bringen läßt. Sie besteht darin, daß ein gewisser Pfaffscher Ausdruck  $P_{r+1}(s_1, s_2, \dots, s_{2r+2})$  Null wird. Dieses Ergebnis wird nun geometrisch gedeutet mit Hilfe der rationalen



Kurve  $x_j = s^j$  und der Bilinearform  $B = \sum a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$ , welche für  $x_i = s^i$ ,  $y_k = t^k$  das Polynom  $K(s, t)$  ergibt. Die Bedingung  $P_r(s_1, \dots, s_{2r+2}) = 0$  bedeutet, daß der Sekantenraum  $S_{2r+1}$  der Kurve, welche durch die Punkte  $s_1, \dots, s_{2r+2}$  bestimmt wird, das Nullsystem  $B = 0$  in einem singulären Nullsystem schneidet. Wenn jeder Sekantenraum  $S_{2r+1}$  diese Eigenschaft besitzt, so hat die Matrix  $(a_{ik})$  des Nullsystems  $B = 0$  höchstens den Rang  $r$ , und daraus folgt bekanntlich

$$B(x, y) = \sum_1^r \{ \varphi_k(x) \psi_k(y) - \varphi_k(y) \psi_k(x) \}.$$

*van der Waerden (Leipzig).*

**Vaidyanathaswamy, R.:** The apolar invariant of bilinear forms. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 315—320 (1934).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Bilinearformen  $A = a_{ij} x^i y^j$  und  $B = b^{ij} U_i V_j$  apolar sind, d. h. daß  $a_{ij} b^{ij} = 0$  ausfällt, ist die Existenz von zwei Simplexes, deren gleich numerierte Seitenpaare mit der Form  $B$  inzident sind (d. h. in  $B$  eingesetzt, Null ergeben) und deren ungleich numerierte Eckenpaare mit der Form  $A$  inzident sind. Zum Beweise dieses Satzes und von einigen ähnlichen spezielleren Sätzen wird die Invariante  $a_{ij} b^{ij}$  als Summe von Werten der Form  $A$  für  $n$  spezielle Punktepaare  $\xi_{(n)}^i, \eta_{(n)}^j$  dargestellt. Von diesen Werten können  $n - 1$  als Null angenommen werden; bei Apolarität muß dann auch der letzte Wert Null sein. — Wendet man dieselbe Vorschrift zur Berechnung der Invariante  $a_{ij} b^{ij}$  auf den Riemannschen Krümmungstensor und auf die Größen

$$R_{jk} = g^{il} R_{ij,kl} \quad \text{und} \quad R = R_{jk} g^{jk}$$

an, so erhält man Sätze von folgender Art: Sind  $\varphi_h$  die Winkel, die ein Einheitsvektor  $\lambda$  mit den orthogonalen Einheitsvektoren  $\lambda_{(h)}$  macht, und ist  $K_h$  die Gaußsche Krümmung des Flächenelementes  $(\lambda \lambda_{(h)})$ , so ist

$$R_{jk} \lambda^j \lambda^k = \sum_{h=1}^n K_h \sin^2 \varphi_h.$$

*van der Waerden (Leipzig).*

**Robinson, G. de B.:** Note on an equation of quantitative substitutional analysis. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 414—416 (1935).

Mit den in Zbl. 5, 97—98 erklärten Bezeichnungen hat A. Young die Formel

$$\Gamma_\alpha = \Sigma \Pi S_{rs}^{\lambda_{rs}} \frac{n!}{f_\alpha} T_\alpha \quad (1)$$

bewiesen. Die rechte Seite ist eine Summe von gewissen  $T_\beta$ , die aus  $T_\alpha$  durch die Operationen  $S_{rs}$  entstehen. Ein bestimmtes  $T_\beta$  möge dabei  $S_\alpha^\beta$ -mal erscheinen. Dann wird eine Formel angegeben, welche  $S_\alpha^\beta$  durch die Charaktere der symmetrischen Gruppe ausdrückt. Weiter folgert man aus (1)

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_h!} = \sum_\beta S_\alpha^\beta f_\beta.$$

*van der Waerden (Leipzig).*

**Weitzenböck, R.:** Zur Theorie der Kombinant. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 616—618 (1934).

Die Kombinant eines Formenbüschels  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$  lassen sich, wenn die Kovarianten  $K_1, \dots, K_r$  von  $f$  und  $g$  bekannt sind, charakterisieren als diejenigen Polynome in  $K_1, \dots, K_r$ , welche bei der dreigliedrigen Gruppe der Transformationen

$$\begin{cases} \bar{f} = \lambda_1 f + \lambda_2 g \\ \bar{g} = \mu_1 f + \mu_2 g \end{cases}$$

invariant bleiben. Eine allgemeine Methode, die Invarianten einer linearen Gruppe zu erhalten, hat der Verf. in Acta math. 58, 267 (1932) (dies. Zbl. 4, 243) angegeben. Hier wird nun am Beispiel von zwei binären quadratischen Formen  $f, g$  gezeigt, wie diese Methode arbeitet.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Hasse, Helmut:** Elementarer Beweis des Hauptsatzes über ternäre quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten. J. reine angew. Math. **172**, 129—132 (1934).

Im rationalen quadratischen Zahlkörper stellt eine ternäre quadratische Form bekanntlich die Null dar, wenn sie die Null modulo jeder Primzahlpotenz darstellt, wobei nur die Potenzen der in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen berücksichtigt zu werden brauchen. Dieser im wesentlichen schon auf Legendre zurückgehende Satz wird hier als Hauptsatz über rationale ternäre quadratische Formen bezeichnet, obschon er sich nur mit den Formen mit der Stammdiskriminante 1 beschäftigt. Der Verf. gibt hier im Rahmen der Henselschen arithmetischen Ausdrucksweise eine knappe, aber vollständige Darstellung des Lagrangeschen Beweisgedankens [Oeuvres 2, 377 (1868)]. Zuletzt wird ein Zusammenhang mit rationalen Quaternionenalgebren hergestellt, der noch deutlicher wird, wenn man beachtet, daß die quaternären Formen einer solchen Algebra mit der Grundzahl  $d$  genau den ternären Formen mit der Stammdiskriminante  $d$  entsprechen. Brandt (Halle a. d. S.).

**Remak, Robert:** Über den Euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Zahlkörpern. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **44**, 238—250 (1934).

Nachdem J. Schatunowski (Diss. Straßburg 1912) an Beispielen gezeigt hat, daß nicht alle quadratisch-imaginären Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 den Euklidischen Algorithmus zulassen, entstand eine analoge Frage für reell-quadratische Zahlkörper. Es ist aber für einen reell-quadratischen Zahlkörper wesentlich schwieriger zu erkennen, ob er den Euklidischen Algorithmus zuläßt, da hier die im Kern der Frage liegende quadratische Form  $Nm(\delta - \gamma)$  indefinit ist. Die ersten richtigen Resultate bekam O. Perron [Math. Ann. **107**, 489—495 (1932); dies. Zbl. **5**, 387]. — Der Verf. beweist die Existenz des Euklidischen Algorithmus für die Körper  $K(\sqrt{d})$  mit  $d = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 21, 29$  (diese wurden schon von Perron erledigt), 33, 37, 41. Alle diese Körper mit Ausnahme von  $d = 11$  erledigt er mit einem Schlage, indem er den Hilfssatz beweist: Ist  $a + b\sqrt{d} = a + c$ ,  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ , eine vorgelegte gebrochene Zahl von  $K(d)$  und gilt  $c^2 < a^2 + 2a + 2$ , so ist die Ungleichung  $|Nm(\alpha - x)| = |(a - x)^2 - c^2| < 1$  stets lösbar. — Am Schluß gibt der Verf. die geometrische Illustration dieses Problems.

Er zeichnet in der Ebene  $(a, c)$  die Gitterpunkte  $\left(a, \frac{c}{\sqrt{d}} \text{ ganz}\right)$  und legt um jeden Gitterpunkt das Hyperbelkreuz, d. h. das Innere der Hyperbeln  $(\xi - a)^2 - (\eta - c)^2 = \pm 1$ . Die Menge der durch diese Hyperbelkreuze unbedeckten Punkte bezeichnet er mit  $N$ . Ist  $N$  die Nullmenge, so gilt sicher der Euklidische Algorithmus; sind dagegen die Punkte von  $N$  isoliert, so gilt er gewiß nicht; enthält  $N$  Häufungspunkte im Endlichen, so bleibt die Frage unentschieden. N. Tschebotarow (Kasan).

**Tannaka, Tadao:** Über eine Indexrelation. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **23**, 343 bis 358 (1934).

Verf. beweist die folgende Relation für relativ-abelsche unverzweigte Körper mit zwei erzeugenden Substitutionen:

$$\frac{a}{h_0} = \frac{(\varepsilon: N_{Kk}(E))}{(H:E^{1-s})};$$

dabei bedeutet  $h_0$  die absolute Klassenzahl von  $k$ ;  $\varepsilon, E$  die Gruppe der Einheiten in  $k$  bzw.  $K$ ;  $H$  die Untergruppe von  $E$  mit  $N_{Kk} = 1$ ;  $a$  die Anzahl der absoluten Idealklassen in  $K$ , welche durch Ideale  $\mathfrak{O}$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{O}^{1-s} = (\mathfrak{O}_s)$  erzeugt werden, wobei  $\mathfrak{O}_s$  Zahlen sind, für welche  $\theta_s^T \theta_T / \theta_{sT} = \theta_T^s \theta_s / \theta_{Ts}$  gilt. Der Vergleich dieses Satzes mit der von Herbrand und Chevalley für relativ-zyklische Körper bewiesenen Relation liefert für unverzweigte relativ-zyklische Körper die Relation  $a = h_0/n$ , wobei  $n$  der Relativgrad von  $K/k$  ist. Da  $a$  mindestens so groß ist wie die Zahl der durch Klassen des Grundkörpers in  $K$  erzeugten absoluten Idealklassen, folgt daraus der bekannte Satz, daß in jedem relativ-zyklischen unverzweigten Körper mindestens so viele Klassen in die Hauptklasse übergehen, wie der Relativgrad des Körpers beträgt.



Verf. beweist die obige Relation mit Hilfe der in dieser Theorie üblich gewordenen Umformungen von Gruppenindizes; außerdem zieht er die folgenden Hilfsmittel heran: Herbrand-Artinschen Satz über die Einheiten in relativ-galoisschen Körpern; Normensatz (Hasse); „Hauptgeschlechtsatz im Minimalen“ (Speiser); Hauptgeschlechtsatz für relativ-galoissche Körper, angewendet auf Hauptideale (E. Noether). *Taussky.*

**Ricci, Giovanni: Ricerche aritmetiche sui polinomi. II. (Intorno a una proposizione non vera di Legendre.)** Rend. Circ. mat. Palermo 58, 190—208 (1934).

The false proposition of Legendre to which reference is made is the following: Let  $A - C, 2A - C, 3A - C, \dots$  be any given arithmetical progression in which  $A$  and  $C$  are relatively prime; let  $\theta, \lambda, \mu, \dots, \psi, \omega$  be any set of  $k$  odd primes; let  $\pi^{(z)}$  denote the  $z$ -th term of the natural sequence 3, 5, 7, ... of odd prime numbers: then in any  $\pi^{(k-1)}$  consecutive terms of the given progression there is at least one which is divisible by no one of the primes  $\theta, \lambda, \mu, \dots, \psi, \omega$ . There is a brief account of the history of this proposition. There is an investigation of the distribution of integers, prime to the product  $p_1 p_2 \dots p_n$  of the  $n$  smallest primes, which are contained in the sequence  $F(1), F(2), F(3), \dots$  where  $F(x)$  is a polynomial in  $x$  having integral values when  $x$  is integral. The extension of earlier methods to the sequence  $F(1), F(2), \dots$  prepares the way for a lemma leading to results of interest in the theory of prime ideals belonging to algebraic domains. (I. see this Zbl. 8, 241.) *R. D. Carmichael* (Urbana).

**Skolem, Th.: Über die ganzzahlige Lösbarkeit einiger diophantischer Gleichungen.** Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 6, 1—17 (1934).

This paper is concerned with criteria for the solvability in integers  $x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_m$  of the system of  $n \leq m$  equations

$$\sum_{j=1}^m f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_r) y_j = g_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

where the  $f$ 's and  $g$ 's are polynomials which assume integer values when their variables are integers. The method is based on the theorem of Heger-Smith which gives the necessary and sufficient condition for the solvability of the system of linear equations

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = b_i \quad (1)$$

in integers  $y_1, \dots, y_m$ . The author imposes conditions on the polynomials  $f$  and  $g$  which insure that their values, for a set of  $x$ 's, will furnish constants  $a_{ij}$  and  $b_i$  in (1) for which the condition of Heger-Smith is satisfied. *Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

**Pomey, Léon: Sur le dernier théorème de Fermat. (Divisibilité par 3 et par 5.)** C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1562—1564 (1934).

Satz 1:  $n$  sei eine Primzahl  $\geq 3$ . Die Gleichung

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0 \quad (1)$$

kann nur dann in von Null verschiedenen ganzen rationalen Zahlen erfüllt werden, wenn mindestens eine der drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  durch 3 teilbar ist. Von diesem Satze hatten Verf. und Massoutié 1931 (vgl. dies. Zbl. 2, 327) den Fall  $n = 6h - 1$  bewiesen, Verf. gibt jetzt den Beweis für die Primzahlen der Form  $6h + 1$ . — Satz 2: Unter der gleichen Voraussetzung kann Gl. (1) nur dann in von Null verschiedenen ganzen rationalen Zahlen erfüllt werden, wenn mindestens eine der drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  durch 5 teilbar ist. — Die Beweise für beide Sätze sind ganz elementar. Störende

Druckfehler: In Gl. (3), S. 1563, muß es statt  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  heißen:  $\varepsilon_1^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon_2^{\frac{n-1}{2}}$ ; in Gl. (4)

ebenda muß es statt  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  heißen:  $\varepsilon_1^{\frac{n+1}{2}}, \varepsilon_2^{\frac{n+1}{2}}$ . Verf. gibt als Folgerung an, daß sich aus diesen Sätzen und einem bekannten Satz von Furtwängler sehr einfache Beweise der Kriterien von Mirimanoff mit den Bedingungen  $3^{n-1} \equiv 1$  und  $5^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}$  ergäben.

*Bessel-Hagen* (Bonn).



**Lehmer, D. N.:** On the enumeration of magic cubes. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 833—837 (1934).

Denkt man sich die ersten  $n^3$  ganzen Zahlen so in die  $n^3$  Punkte eines kubischen Punktgitters gesetzt, daß die Summe jeder Reihe von  $n$  Zahlen, die einer Kante parallel ist, immer  $n(n^3 + 1) : 2$  ist, so hat man einen magischen Kubus. Aus jedem m. K. kann ein „normaler“ m. K. abgeleitet werden durch wiederholte Vertauschung zweier, einer Seitenfläche paralleler, Flächen und durch Drehungen. In einem n. m. K. steht  $n^3$  in einer Ecke (die 3 Kanten dieser Ecke sind die Achsen eines Koordinatensystems); die Zahlen auf jeder Achse sind, vom Anfangspunkte aus, in abnehmender Größe geordnet und die nächst zu  $n^3$  stehende Zahl auf der  $x$ -Achse ist größer als die auf der  $y$ -Achse und diese ist größer als die auf der  $z$ -Achse. Für den Fall  $n = 3$  wird die Anzahl aller n. m. K. zu 4 bestimmt. Für die Achsen ergeben sich 7 Zahlenpaare neben der Eckzahl 27. Daraus gehen 35 zu untersuchende Möglichkeiten von 3 Paaren für die Achsen hervor. Für eine einzige von diesen wird die weitere Konstruktion ausführlich angegeben. Erstens werden die 7 (nicht 8 wie auf S. 835; denn das m. Q. mit 11 im Zentrum muß gestrichen werden; das Ergebnis ist jedoch richtig) m. Q. der  $x y$ -Fläche, die 5 der  $y z$ -Fläche und die 7 der  $z x$ -Fläche konstruiert. Von den  $7 \cdot 5 \cdot 7$  Kombinationen müssen viele verworfen werden, weil sie eine Zahl zweimal enthalten. Die übrigen liefern nur einen einzigen m. K. *N. G. W. H. Beejer* (Amsterdam).

### **Analytische Zahlentheorie:**

**Mordell, L. J.:** On the Riemann hypothesis and imaginary quadratic fields with a given class number. *J. London Math. Soc.* **9**, 289—298 (1934).

Die Arbeit schließt an an des Ref. Note: Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. *Math. Z.* **37**, 405—415 (1933); dies. Zbl. **7**, 296. Sei  $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  eine positiv definite quadratische Form,  $b^2 - 4ac = -d < 0$  ihre Diskriminante. Die loc. cit. für die Funktion  $\zeta_Q(s) = \frac{1}{2} \sum' Q(n, m)^{-s}$  aufgestellte Approximationsformel für große  $d$

$$\zeta_Q(s) = a^{-s} \zeta(2s) + d^{\frac{1}{2}-s} a^{-\frac{1}{2}} \zeta(2s-1) \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s - \frac{1}{2}) / \Gamma(s) + O(a^{\sigma-\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\delta d^{\frac{1}{2}}}), \quad (1)$$

wo  $\delta > 0$  fest, gültig in einem gegebenen beschränkten  $s$ -Bereich, wird neu bewiesen unter Heranziehung des Verf. Note: On Hecke's modular functions. *Proc. London Math. Soc.* (2) **32**, 501—556 (1930). — In der erwähnten Note des Ref. wurde (1) dazu benutzt, um aus der Annahme, es gebe unendlich viele imaginäre quadratische Zahlkörper  $k(\sqrt{-d})$  mit der Klassenzahl  $h(d) = 1$ , abzuleiten, daß  $\zeta(s) \neq 0$  für  $\sigma = R(s) > \frac{1}{2}$ , und daß die Nullstellen von  $\zeta(s)$  einfach sind. Verf. zieht in ähnlicher Weise aus der schwächeren Annahme  $\liminf_{d \rightarrow \infty} h(d) \neq \infty$  die gleichen Schlüsse. Für die

Zetafunktion  $\zeta(s)L_d(s)$  von  $k(\sqrt{-d})$  ergibt (1)

$$\zeta(s)L_d(s) = A_{-s}(d)\zeta(2s) + A_{s-1}(d)d^{\frac{1}{2}-s}\zeta(2s-1)\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s-\frac{1}{2})/\Gamma(s) + O(h(d)d^{\sigma-\frac{1}{2}}), \quad (2)$$

wo  $A_s(d) = \sum_{i=1}^{h(d)} a_i^s$  ist, unter  $a_i$  die Anfangskoeffizienten der reduzierten Formen zur

Diskriminante  $-d$  verstanden. Gäbe es unendlich viele  $d = d_0$  mit  $h(d_0) = h = \text{konst.}$ , und wäre  $\zeta(s) = 0$  für ein  $s$  mit  $\sigma > \frac{1}{2}$ , so würde  $\lim_{d \rightarrow \infty} A_{-s}(d_0) = 0$  folgen. Dies steht aber in Widerspruch zu der Relation  $\liminf_{d_0 \rightarrow \infty} A_{-s}(d_0) \geq (1 - 2^{-\frac{1}{2}})(1 - 3^{-\frac{1}{2}}) \dots (1 - p_{\lambda}^{-\frac{1}{2}})$ ,

die Verf. durch nähere Betrachtung der  $a_i$  beweist. Es ist dabei  $\log h_0 / \log 2 < \lambda \leq \log h_0 / \log 2 + 1$  und 2, 3, ...,  $p_{\lambda}$  sind die ersten  $\lambda$  Primzahlen. In ähnlicher Weise wird dann des Ref. Schluß auf die Einfachheit der Nullstellen von  $\zeta(s)$  verallgemeinert. Während des Druckes dieser Arbeit bewies Heilbronn  $\liminf_{d \rightarrow \infty} h(d) = \infty$  [Quart.

*J. Math.* **5**, 150—160 (1934); dies. Zbl. **9**, 296]. — Über den Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit und mit des Ref. Note vgl. dies. Zbl. an beiden ang. Orten.

*Deuring* (Leipzig).



**Mahler, Kurt:** On Hecke's theorem on the real zeros of the  $L$ -functions and the class number of quadratic fields. J. London Math. Soc. 9, 298—302 (1934).

Die im vorstehenden Referat mit (1) bezeichnete Formel wird benutzt, um Relationen zwischen  $h(d)$  und den reellen Nullstellen von  $L_d(s)$  aufzustellen. Wird  $h'(d) = h(d)/A_{-1}(d)$  gesetzt [die Bedeutung von  $A_{-1}(d)$  siehe im vorst. Referat], so gilt folgender Satz: Ist  $\delta > 0$  vorgegeben, so gibt es Zahlen  $\Gamma = \Gamma(\delta) > 0$  und  $G = G(\delta) > 0$ , so daß, wenn  $L_d(s)$  im Intervall

$$1 - \delta/\log d \leq s \leq 1$$

Nullstellen hat,

$$h' \leq \Gamma \cdot d^{1/2}/\log d$$

gilt für alle hinreichend großen  $d$ , während

$$h' \geq G \cdot d^{1/2}/\log d$$

für alle hinreichend großen  $d$  gilt, wenn  $L_d(s)$  keine Nullstellen in dem angegebenen Intervall hat. Um den Beweis dem Verständnis näherzubringen, bemerken wir, daß aus der Formel (2) des vorstehenden Referates für  $h(d_0) = \text{konst.}$  die Beziehung

$$\liminf_{d_0 \rightarrow \infty} L_{d_0}(s) \leq (1 - 2^{-1}) \dots (1 - p_n^{-1}) \zeta(2s)/\zeta(s) \quad \text{für } \sigma > \frac{1}{2}$$

folgt, wonach  $L_{d_0}(s)$  für hinreichend großes  $d_0$  eine Nullstelle zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 haben muß. Das Ergebnis dieser Arbeit ist, im Gegensatz zu dem der vorstehend referierten, durch den Beweis von  $h(d) \rightarrow \infty$  nicht überholt, denn einerseits ist über die genaue Größenordnung von  $h(d)$  nichts bekannt, und andererseits weiß man nicht, ob die Funktionen  $L_d(s)$  Nullstellen zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 haben können oder nicht.

Deuring (Leipzig).

**Chowla, S.:** Primes in an arithmetical progression. Indian Phys.-Math. J. 5, 35—43 (1934).

In this paper the known asymptotic formula for  $\pi(x; k, l)$ , the number of primes  $\equiv l \pmod{k}$  not exceeding  $x$ , is made more precise in various directions. It is proved that the formula

$$\pi(x; k, l) \sim \frac{x}{\Phi(k) \log x},$$

which is well known for fixed  $k, l$ , is also true for variable  $k$  such that  $x \geq \exp(k^c)$ , where  $c > \frac{1}{2}$ . If this were true for  $c < \frac{1}{2}$ , the class-number  $h(-k)$  would satisfy  $h(-k) > k^{1-c-\varepsilon}$ . Also

$$\pi(x; k, l) < \frac{\theta x}{\Phi(k) \log x}$$

for  $\theta > 2$ ,  $x \geq \exp(\log^5 k)$ ; and if this were true for  $\theta < 2$ , we should have  $h(-k) > k^{1-\varepsilon}$ . The proofs depend mainly on the theory of Dirichlet's  $L$ -functions.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Vinogradov, I.:** Some theorems of the analytical theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS 4, 185—186 u. engl. Zusammenfassung 187 (1934) [Russisch].

Verf. bietet (ohne Beweis) neue Anwendungen seiner Methoden, welche er in zwei früheren Arbeiten behandelt hat (vgl. dies. Zbl. 10, 9, 10): 1. für die Aufstellung einer asymptotischen Formel für die Anzahl der Lösungen von  $N = (p_1 p'_1)^n + \dots + (p_k p'_k)^n$ , wo  $p_i, p'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) Primzahlen sind; 2. für das Piltzsche Problem für das Gebiet  $x_1 x_2 \dots x_n \leq a$ ,  $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ ; 3. für die Abschätzung der Summen  $\sum e^{2\pi i f(\omega)}$ , wo  $\omega = x_1 \dots x_k$  und  $x_i$  ganze Zahlen sind, welche sich in gegebenen Intervallen befinden und welche nicht notwendig aufeinanderfolgen müssen. Lubelski.

**Bell, E. T.:** Note on sums of four squares. Tôhoku Math. J. 39, 361—364 (1934).

This note is concerned with a formula which is equivalent to the one obtained from the identification of coefficients in the product of 4 theta functions. The formula involves an arbitrary single-valued function of four variables summed over certain quadratic partitions associated with the representation of an arbitrary integer as a sum of four squares.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).



**Boehle, Karl:** Über die Approximation von Potenzen mit algebraischen Exponenten durch algebraische Zahlen. Math. Ann. 110, 662—678 (1935).

Bedeute  $\mathfrak{R}$  einen Zahlkörper  $s$ -ten Grades,  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_s$   $s$  unabhängige Zahlen desselben,  $a$  eine komplexe Zahl mit  $a(a-1) \neq 0$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$   $s$  algebraische Zahlen der Grade  $g_1, \dots, g_s$  und der Höhen  $H_1, \dots, H_s$ , ferner  $g$  den Grad des durch  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  gemeinsam erzeugten Körpers, und  $B = \max_{h=1, \dots, s} H_h^{\frac{g}{g_h}}$  die „gemeinsame Höhe“ der  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ .

Dann zeigt Verf.: „Es gibt zwei von  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  unabhängige positive Zahlen  $c'$  und  $c''$ , so daß

$$\max_{h=1, \dots, s} |a^{\vartheta_h} - \gamma_h| \geq c' e^{-(c'' \log B)^{\frac{s}{s-1}} (\log \log B)^{-\frac{1}{s-1}}}$$

wird, sobald  $B$  größer als eine noch von  $g$  abhängige Zahl ist.“ In diesem Satz ist u. a. das Ergebnis von Koksma-Popken über  $e^\pi$  (s. dies. Zbl. 5, 349) enthalten. — Der Beweis steht in Beziehung zur älteren Gelfond'schen Methode: Ohne Einschränkung sei  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_s$  eine Basis von  $\mathfrak{R}$ . Seien ferner  $\zeta_0 = 0$ ,  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  die ganzen Zahlen aus  $\mathfrak{R}$ , geordnet nach steigender Größe des Maximums der Absolutbeträge sämtlicher Konjugierten, wobei aber  $\zeta_{2k-1} = -\zeta_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) genommen werde.

Man setzt  $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{a^t dt}{P_{n+1}(t)}$ , wobei  $P_{n+1}(t) = \prod_{k=0}^n (t - \zeta_k)$ , und integriert wird über eine Kurve, in deren Innern  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$  liegen. Demnach ist  $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^{\zeta_k}}{P'_{n+1}(\zeta_k)}$ .

Bedeutet  $\zeta_k = \sum_{h=1}^s g_{kh} \vartheta_h$  die Basisdarstellung von  $\zeta_k$ , so daß die  $g_{kh}$  ganz rational

sind, so werde analog dazu gesetzt:  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{h=1}^s \gamma_h^{g_{kh}}}{P'_{n+1}(\zeta_k)}$ . Ist jetzt  $\varepsilon = \max_{h=1, \dots, s} |a^{\vartheta_h} - \gamma_h|$  schon

genügend klein, so folgt durch eine Stetigkeitsbetrachtung, daß  $|a_n - b_n| < \varepsilon n^{-\frac{n}{s}} e^{O(n)}$  ist; dabei benutzt man eine arithmetische untere Schranke für  $P'_{n+1}(\zeta_k)$ . Die Betrachtung der Norm und des Nenners von  $a_n$  zeigt weiter, daß entweder  $a_n = 0$  oder

$|a_n| \geq n^{-\frac{n}{s}} e^{-C_9 g n} B^{-C_{10} n^{1/s}}$  ist, wo  $C_9$  und  $C_{10}$  nicht von  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  abhängen. Indem man  $n$  gerade nimmt und  $b_n$  in eine Potenzreihe nach  $\zeta_2, \zeta_4, \dots, \zeta_n$  entwickelt, in der das konstante Glied die übrigen überwiegt, ergibt sich schließlich für geeignete

genügend große  $n$  die Ungleichung  $\frac{1}{2} \frac{|\log a|^n}{n!} \leq |b_n| \leq \frac{3}{2} \frac{|\log a|^n}{n!}$ , so daß alsdann für  $a_n \neq 0$ , wie auch für  $a_n = 0$  stets  $|a_n - b_n| \geq \frac{1}{2} \frac{|\log a|^n}{n!}$  und somit  $\varepsilon \geq n^{\frac{n}{s}} e^{C_3 n} \frac{|\log a|^n}{n!}$

wird. Indem man für  $n$  den zulässigen Wert mit  $n^{\frac{s-1}{s}} = \frac{2 C_{10} \log B}{\log \log B}$  nimmt, ergibt sich für genügend großes  $B$  die Behauptung. — Es wäre von Interesse, festzustellen, ob die neuen Methoden von Gelfond (vgl. dies. Zbl. 9, 53) und Schneider (vgl. dies. Zbl. 10, 106) zu schärferen unteren Schranken führen. Mahler (Groningen).

## Gruppentheorie.

**Miller, G. A.:** Groups in which the squares of the elements are a dihedral subgroup. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 819—825 (1934).

Die im Titel genannten Gruppen werden völlig aufgezählt. Sie zerfallen in mehrere Systeme, je nachdem ob die von den Quadraten der Gruppenelemente gebildete Diedergruppe die Ordnung  $2u$ ,  $4u$  ( $u$  eine ungerade Zahl  $> 1$ ) oder  $4$  hat.

Magnus (Princeton).



**Frame, J. S.: Unitäre Matrizen in Galoisfeldern.** Comment. math. helv. 7, 94 bis 102 (1934).

Die von Dickson (Linear Groups) betrachteten einfachen Gruppen  $HO(m, p^{2s})$  werden geometrisch gedeutet: In dem Galoisfeld  $GF(q^2)$ ,  $q = p^s$  bedeute  $\bar{x}$  das „konjugierte“ Element  $x^2$ . Das skalare Produkt zweier  $m$ -reihigen Vektoren mit Koeffizienten aus  $GF(q^2)$  sei durch  $(a/b) = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i b_i$  erklärt. Es werden die Vektoren  $a$  mit  $(a/a) = 0$  zu Scharen  $G_a$  zusammengefaßt,  $G_a$  besteht aus allen Vielfachen  $xa$  eines Vektors. Durch eine unitäre Transformation  $T$  geht die Schar  $G_a$  in die Schar  $G_{aT}$  über, die  $G_a$  werden durch  $T$  permutiert. Die durch Anwendung aller  $T$  so entstehende Permutationsgruppe ist isomorph  $HO(m, p^{2s})$ . Aus dieser geometrischen Deutung werden Folgerungen über die Charaktere und Klasseneinteilungen dieser Gruppen gezogen. Für  $m = 3$  wird die Anzahl der Klassen und der Elemente in ihnen angegeben.

Köthe (Münster).

**Brahana, H. R.: Metabelian groups of order  $p^{n+m}$  with commutator subgroups of order  $p^m$ .** Trans. Amer. Math. Soc. 36, 776—792 (1934).

Verf. dehnt seine Untersuchungen [Amer. J. Math. 56, 53—61, 490—510 (1934); dies. Zbl. 8, 201; 10, 153; vgl. die dortigen Bezeichnungen] auf den Fall aus, daß in der „metabelschen“ Gruppe  $G$  mit der maximalen abelschen invarianten Untergruppe  $H$  der Ordnung  $p^n$  und vom Typ  $(1, 1, \dots)$   $G/H = U$  eine abelsche Gruppe ist, deren sämtliche Operatoren, als Automorphismen von  $H$  aufgefaßt, zu Zerlegungen  $n = \sum n_i$  mit  $n_i \leq 2$  aber mehreren  $n_i = 2$  gehören. Hat  $G$  die Ordnung  $p^{n+m}$  und das Zentrum  $Z$  von  $G$  die Ordnung  $p^{n-k}$  ( $Z \subset H$ ), so läßt  $G$  sich charakterisieren durch eine Matrix  $M = \sum_{i=1}^k x_i M_i$ , wobei die  $M_i$   $m$ -reihige quadratische Matrizen und die  $x_i$  Variablen in einem Galoisfeld  $GF$  der Ordnung  $p$  sind. Sind  $M$  und  $M'$  die zu zwei solchen Gruppen  $G$  und  $G'$  gehörigen Matrizen, so sind  $G$  und  $G'$  dann und nur dann isomorph, wenn sich  $M'$  nach Ausübung einer linearen homogenen Substitution der  $x_i$  in eine Matrix  $D M C$  überführen läßt, wobei  $D$  und  $C$  (konstante) Matrizen aus  $GF$  sind. — Für  $k = 2$  wird ein besonders einfacher Spezialfall behandelt, der auf die Frage nach den Kongruenzen  $m$ -ten Grades in einer Variablen  $x$  in  $GF$  führt, die sich nicht durch eine gebrochen-lineare Substitution von  $x$  ineinander überführen lassen. Für die Fälle  $m = 3$  und  $m = 4$  sowie insbesondere für  $m = 4$  und  $p = 7$  wird dieser Spezialfall besonders eingehend diskutiert.

Magnus (Princeton).

**Ferns, H. H.: The irreducible representations of a group and its fundamental region.** Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 28, 35—60 (1934).

Die Methode von A. Young [s. etwa Proc. London Math. Soc. (2) 28, 255—292 (1928)] zur Auffindung der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe  $\Sigma_{n!}$  wird zur Aufstellung gewisser orthogonaler, aber reduzibler Darstellungen von  $\Sigma_{n!}$  benutzt. Ist  $G_\Phi$  eine solche, so wird ein Verfahren angegeben, eine Matrix  $[\Phi]$  zu finden, so daß durch Transformation mit dieser  $G_\Phi$  vollständig reduziert wird. Zu  $G_\Phi$  läßt sich leicht ein Simplex finden, das bei  $G_\Phi$  invariant bleibt. Projektion dieses Simplexes in die den irreduziblen Bestandteilen von  $G_\Phi$  entsprechenden Teilräume liefert dort gewisse Polyeder, zu deren Konstruktion die Kenntnis von  $[\Phi]$  genügt. [Von Bedeutung sind dabei nur die  $(n-1)$ -dimensionalen Teilräume.] Die so (für alle  $G_\Phi$ ) erhaltenen Polyeder bestimmen dann eindeutig einen Fundamentalbereich von  $\Sigma_{n!}$ , wie mittels einer Methode von Robinson [J. London Math. Soc. 6, 70—75 (1931); dies. Zbl. 1, 199] gezeigt wird. Für  $n = 4, 5$  werden die Matrizen  $[\Phi]$  explizit angegeben, und die geometrische Konstruktion wird wirklich durchgeführt. Magnus.

**Littlewood, D. E., and A. R. Richardson: Immanants of some special matrices.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 269—282 (1934).

In der Arbeit „Group characters and algebra“ von denselben Autoren (vgl. dies. Zbl. 9, 202) wurden die  $S$ -Funktionen  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  als „Immanenten“ gewisser Matrices

erklärt. Sie sind symmetrische Funktionen von  $x_1, \dots, x_m$  und drücken sich mit Hilfe der Charaktere der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_m$  in einfacher Weise durch die Potenzsummen  $S_1, S_2, \dots$  der  $x_i$  aus. In dieser Arbeit werden die Werte der  $S$ -Funktionen für den Fall berechnet, daß alle  $x_i = 1$  sind ( $S_1 = S_2 = \dots = m$ ), sowie für den Fall, daß die Hälfte des  $x_i = +1$  und die Hälfte  $= -1$  ist ( $S_{2i+1} = 0, S_{2i} = m$ ). Beide Male ergeben sich einfache Quotienten von Produkten von ganzen Zahlen. Daraus erhält man einfache Ausdrücke für gewisse Summen von Charakteren  $\sum h_s \chi^{(\lambda)}(s)$ ,

summiert über alle oder gewisse Klassen von Permutationen  $s$ , welche aus genau  $p$  Zyklen bestehen ( $p$  beliebig). Die Beweise beruhen alle auf der Darstellung der  $S$ -Funktionen als Quotienten von Determinanten:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = |x_i^{t_i+n-t}| : |x_i^{n-t}|.$$

Die erhaltenen Formeln können zur Berechnung der Charaktere der Klassen von Permutationen mit nur einem Zykel oder mit lauter Zykeln geraden Grades benutzt werden. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf die  $S$ -Funktionen der Wurzeln von  $(x^r - 1)^m$  ausgedehnt.

van der Waerden (Leipzig).

**Suschkewitsch, A.: Über Semigruppen.** Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 25—27 (1934).

Eine Semigruppe  $G$  ist ein unter einer assoziativen Operation abgeschlossenes System von Elementen, in welchem eine Gleichung  $a b = c$  bei gegebenem  $a$  (bzw.  $b$ ) und  $c$  höchstens eine Lösung  $b$  (bzw.  $a$ ) hat. Enthält  $G$  unendlich viele Elemente, so braucht es keine Gruppe zu sein; es läßt sich stets in eine Summe  $K + H$  zerlegen, wobei  $K$  leer bzw. die größte in dem System enthaltene Gruppe ist. Es ist u. a.  $K \cdot H = H \cdot K = H$ ,  $G a = a G = G$  bzw.  $G a \subset H$ ,  $a G \subset H$ , je nachdem  $a$  ein Element aus  $K$  oder aus  $H$  ist.

Magnus (Princeton).

**Suschkewitsch, A.: Über einen merkwürdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen.** Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 39—44 (1934).

Ist  $G$  ein unter einer assoziativen Operation abgeschlossenes System von Elementen, derart, daß in der Gleichung  $a b = c$  bei gegebenem  $b$  und  $c$  höchstens ein zugehöriges  $a$  und bei gegebenem  $a$  und  $c$  mindestens ein zugehöriges  $b$  existiert, so braucht  $G$ , wenn es unendlich viele Elemente enthält, keine Gruppe zu sein [R. Baer und F. Levi, S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1932, 3—12; dies. Zbl. 4, 338], ist aber z. B. eine solche, wenn  $x a = a$  für wenigstens ein  $a$  eine Lösung  $x$  besitzt. Allgemein läßt sich die Lösungsmenge  $x$  von  $x a = b$  näher charakterisieren.

Magnus (Princeton).

**Alexander, Ernst: Bemerkung zur Systematik der eindimensionalen Raumgruppen.** Z. Kristallogr. A 89, 606—607 (1934).

Berichtigung zur gleichnamigen Arbeit in Z. Kristallogr. 70, 369 (1929). Die dortigen beiden Gruppen  $\mathfrak{C}_r^+$  und  $\mathfrak{D}_r^+$  sind identisch mit  $\mathfrak{C}_r^*$  und  $\mathfrak{D}_r^*$ . Burckhardt (Zürich).

**Smith, P. A.: The fundamental group of a group manifold.** Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 577—578 (1934).

Nach O. Schreier [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, 30 (1927)] ist die Fundamentalgruppe einer  $r$ -gliedrigen kontinuierlichen Gruppe abelsch. Nun wird behauptet, daß sie höchstens  $r$  unabhängige Elemente enthält. Der Beweis wird nur skizziert.

van der Waerden (Leipzig).

## Analysis.

● **Weber, H., und J. Wellstein: Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Bd. 1. Arithmetik, Algebra und Analysis.** Von H. Weber. Neubearb. v. P. Epstein. 5. verb. u. verm. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. XVI, 582 S. u. 26 Fig. geb. RM. 20.—.

Die Neuaufgabe dieses bekannten, vorzüglichen Lehrbuches unterscheidet sich nach Ausweis des Vorwortes von der vorangehenden vor allem durch die Umarbeitung



des Abschnittes über die Einführung der natürlichen Zahlen; neben die Betrachtung von „Aggregaten“ (endlichen Mengen) ist jetzt auch immer die Einführung auf Grund der Peanoschen Axiome gestellt. Die weiteren Abschnitte (Arithmetik, Algebra, Elemente der Analysis, d. h. insbesondere Reihen, aber keine Diff.-Rechnung) sind im wesentlichen aus der 4. Aufl. übernommen. Besonders hervorzuheben ist aber die Ausführlichkeit und Sorgfalt in der Behandlung aller historischen Fragen, die die genaue Quellen- und Literaturkenntnis des Herausgebers beweisen und überall auf den neuesten Stand unserer Kenntnisse gebracht sind. *O. Neugebauer.*

**Sibirani, Filippo:** *Sul reciproco del teorema del valor medio.* Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, VIII. s. 10, 11—15 (1933).

Die reelle Funktion  $F(x)$  sei im Intervall  $(a, b)$  differenzierbar und  $\gamma$  ein Punkt aus  $(a, b)$ . Es werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß es in beliebiger Nähe von  $\gamma$  zwei Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  gibt, so daß

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} = F'(\gamma)$$

ist. Diese Bedingungen beziehen sich auf das Verhalten der Ableitung in der Umgebung von  $\gamma$ . *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Doetsch, Gustav:** *Über die Existenz der Darbouxsehen Integrale und verwandter Begriffe.* J. reine angew. Math. 172, 183—192 (1934).

Führt man das bestimmte (Riemannsche) Integral auf dem Wege über das untere und obere (Darbouxsee) Integral ein, so muß man, um den Anschluß an Riemanns Definition zu gewinnen, den sog. Darbouxsehen Satz beweisen, daß nämlich bei genügend feiner Zerlegung die Unter- bzw. Obersummen beliebig nahe am unteren bzw. oberen Integrale liegen. Bekanntlich liegt ein ganz analoger Sachverhalt bei der Definition z. B. des  $n$ -dimensionalen Integrals (nach Riemann oder Lebesgue), des Stieltjesintegrals, der Bogenlänge, totalen Variation vor. Der Beweis des Analogons zum Darbouxsehen Satze ist stets im Kern der gleiche. — Diesen bekannten Sachverhalt präzisiert Verf., indem er den genannten gemeinsamen Beweiskern als Satz über Unter- und Obersummen gewisser Intervallfunktionen ausspricht. Im übrigen ist der von ihm vorgeschlagene Weg, das Riemannsche Integral über die Darbouxsehen Integrale und den Darbouxsehen Satz einzuführen, an vielen deutschen Hochschulen (auch an der des Ref.) durchaus üblich. Er findet sich auch z. B. selbst in älteren Auflagen von Goursat, Cours d'Analyse, wo in Fußnoten ausdrücklich auf die obigen Analoga des Darbouxsehen Satzes aufmerksam gemacht wird. *Rogosinski.*

**John, Fritz:** *Identitäten zwischen dem Integral einer willkürlichen Funktion und unendlichen Reihen.* Math. Ann. 110, 718—721 (1935).

The identity in question is

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(\gamma)}{\nu} f\left(x - \frac{\log \nu}{\log \gamma}\right) = \log \gamma \cdot \int_0^1 f(y) dy,$$

where  $f(x)$  is any function of bounded variation in  $(0, 1)$  and of period 1;  $\gamma = \frac{p}{q}$  is a rational number  $> 1$ ; and  $a_{\nu}(\gamma) = 0$  ( $p \nmid \nu$ ,  $q \nmid \nu$ ),  $= q(p \nmid \nu, q \nmid \nu)$ ,  $= -p(p \nmid \nu, q \nmid \nu)$ ,  $= q - p(p \nmid \nu, q \nmid \nu)$ . It is said to have occurred in investigations on the distribution of prime numbers. The proof is elementary. *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

**Bruwier, L.:** *Sur une propriété caractéristique des polynômes à une variable.* Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 5, 6—11 (1934).

Für ein Polynom  $n$ -ten Grades  $f(x)$  besteht identisch in  $x$  und  $h$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} h^{n-2} + \frac{f^{(n-1)}(x+\theta h)}{(n-1)!} h^{n-1} \quad \text{mit } \theta = 1/n.$$

Setzt man hier umgekehrt  $\theta = 1/n$ , so hat die so entstehende Funktionalgleichung die Polynome  $n$ -ten Grades als einzige Lösung. *Szegö* (St. Louis, Mo.).

**Pompeiu, Dimitrie:** Sur les équations fonctionnelles des polynomes à variables réelles. Bull. Soc. Math. France **62**, 185—192 (1934).

Die betreffenden Funktionalgleichungen, welche von der Form

$$\frac{f(x_1) - f(x_4)}{x_1 - x_4} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \quad (1)$$

sind, beziehen sich nur auf Polynome ersten und zweiten Grades, und zwar wird gezeigt, daß, wenn  $x_1 - x_4 = x_2 - x_3$  ist, die allgemeinste stetige Lösung von (1) ein Polynom ersten Grades ist, wenn aber  $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$  ist, die Lösung ein Polynom zweiten Grades ist.

*Karamata* (Beograd).

**Bateman, Harry:** Selective functions and operations. Amer. Math. Monthly **41**, 556—562 (1934).

**Labocetta, L.:** Sulla unificazione delle funzioni espresse da serie che convergono in intervalli fra loro complementari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 373 bis 376 (1934).

Es handelt sich um Ausdrücke, z. B. Integrale, von denen eines für  $|x| \leq 1$ , das andere für  $|x| > 1$  erklärt ist; die Vereinheitlichung bedient sich der Symbole, die der Verf. schon in früheren Aufsätzen verwendet hat (vgl. dies. Zbl. **2**, 253, 387; **5**, 155, 248, 350).

*L. Schrutka* (Wien).

**Břečka, W.:** Über ein Extremumproblem. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **9**, 49—51 (1934).

Korkin und Zolotarev haben das Minimum des Integrals  $\int_{-1}^{+1} |f(x)| dx$  bestimmt,

wenn  $f(x)$  alle Polynome  $n$ -ten Grades durchläuft, in denen der Koeffizient von  $x^n$  gleich 1 ist. Findet die Normierung von  $f(x)$  in der Weise statt, daß der Koeffizient von  $x^{n-2s}$  (statt von  $x^n$ ) gleich 1 ist, so erhält Verf. für das Minimum  $M$  die asymptotische Formel

$$M \sim \frac{s!}{2^{n-2s-1} n^s}, \quad n \rightarrow \infty, \quad s \text{ fest.}$$

*G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Roskopf, M. F.:** Some inequalities for non-uniformly bounded ortho-normal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 853—867 (1934).

F. Riesz hat im Anschluß an Hausdorff eine Verallgemeinerung der Parseval'schen Formel für gleichmäßig beschränkte Orthogonalsysteme und für allgemeine Exponenten gegeben [Math. Z. **18**, 117 (1923)]. Verf. dehnt diese Resultate auf gewisse nichtbeschränkte Systeme von orthogonalen Polynomen in dem folgenden Sinne aus. Es sei  $p(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , eine nichtnegative Belegungsfunktion,  $\{A_n(x)\}$  das zugehörige normierte Orthogonalsystem von Polynomen, ferner sei  $\alpha(x)$  absolut stetig,  $\alpha' = \beta \geq 0$  und sogar mit Ausnahme einer Nullmenge  $\beta > 0$ . Setzt man

$$W(x) = p(x)^{\frac{1}{p}} \beta(x)^{-\frac{1}{p}}, \quad J_p^b = \int_a^b |W(t) f(t)|^p d\alpha(t), \quad S_p' = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^{p'}, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1, \quad p \leq p',$$

wobei die  $c_n$  die Fourierschen Koeffizienten einer Funktion  $f(x)$  nach den Polynomen  $A_n(x)$  bezeichnen, und sind die Funktionen  $\{W(x) A_n(x)\}$  gleichmäßig be-

schränkt, so gelten die folgenden Sätze: I. Existiert  $J_p$ , so ist  $S_p' \leq A^{\frac{2-p}{p}} J_p^p A$  eine Konstante. II. Ist  $\sum |c_n|^p$  konvergent, so gibt es eine Funktion  $f(x)$  mit den Fourier-

schen Konstanten  $c_n$ , so daß  $J_{p'}$  existiert, daß ferner  $J_{p'} \leq A^{\frac{2-p}{p}} S_p$  gilt,  $A$  eine Konstante. Verf. wendet diese Ergebnisse auf Jacobische und Hermite'sche Entwicklungen an und beweist schließlich die folgende Ausdehnung eines Satzes von Paley [Studia Math. **3**, 226 (1931); dies. Zbl. **3**, 352]. III. Es bezeichne  $\{c_n\}$  eine Nullfolge,

$\{\gamma_n\}$  eine Umordnung der  $|c_n|$  in eine abnehmende Folge, und  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p'} n^{p'-2}$  sei kon-



vergent. Dann gibt es eine Funktion  $f(x)$  mit den Fourierschen Konstanten  $c_n$ , so daß  $J_{p'}$  existiert, daß ferner  $J_{p'} \leq A \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{p'} (n+1)^{p'-2}$  gilt,  $A$  eine Konstante.  
*G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

**Takahashi, Tatsuo:** Note on the system of the orthogonal functions. Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 541—543 (1934).

The following result is established. Let  $\{\varphi_i(s)\}$  be an orthogonal system of functions defined in the interval  $0 \leq s \leq 1$ , and let

$$K_n(s_0, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s_0) \varphi_i(s), \quad \omega_n = \int_0^1 |K_n(s_0, s)| ds.$$

If  $\{\omega_n\}$  is unbounded, then the set of functions whose Fourier expansions, with respect to  $\{\varphi_i\}$ , are unbounded at the point  $s_0$ , is of the second category in the space of all continuous functions. Although the result is not explicitly stated, it is implicitly contained in Banach and Steinhaus, Fundam. Math. 9, 50—61 (1927).  
*A. Zygmund (Wilno).*

**Achyèsér, N.:** Über den Jacksonschen Approximationssatz. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 3—12 (1934).

Die Jacksonsche Behandlung der „besten Approximation“ beruht auf einem Gegenstück zu dem Fejérschen Integral, das (in einer von de la Vallée-Poussin angegebenen modifizierten Form) folgendermaßen lautet:

$$J_n(x) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

Verf. zeigt, daß dies für eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots$  gleich

$$\frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} D\left(\frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ist, wobei

$$D(\alpha) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{3}{4} \alpha^3 & \text{für } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{4} (2 - \alpha)^3 & \text{für } 1 \leq \alpha \leq 2. \end{cases}$$

Weiter wird mittels der Polynome

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} \left\{ 1 - \left[ 1 - D\left(\frac{k}{n}\right) \right]^r \right\} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (r \text{ positiv ganz})$$

die beste Annäherung einer  $r$ -mal stetig differenzierbaren Funktion (mit vorgegebenem Stetigkeitsmodul der  $r$ -ten Ableitung) bzw. ihrer Ableitungen nach oben abgeschätzt.

*G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

### Reihen:

**Vivanti, G.:** Su certe serie di potenze. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 265—266 (1934).

L'auteur donne une démonstration aussi brève que simple et élémentaire d'une proposition sur les fonctions rationnelles définies par les séries  $\sum n^m z^n$ , récemment démontrée par J. Babini (ce Zbl. 9, 344).  
*Vlad. Bernstein (Milano).*

**Bergeat, Pierre:** Sur la convergence des développements en série de polynomes de Legendre des fonctions à variation bornée. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1363—1365 (1934).

En utilisant des propriétés asymptotiques connues des polynomes de Legendre et moyennant quelques remarques complémentaires l'auteur donne des conditions suffisantes pour la convergence uniforme des séries de polynomes de Legendre, dont la plus générale est exprimée par le théorème: Soit  $f(x)$  continue et à variation bornée sur  $(-1, +1)$ ; soit  $f'(x)$  de carré sommable sur les segments  $(\alpha, +1)$  et  $(-1, -\alpha)$ , où  $0 < \alpha < 1$ ; le développement en série de polynomes de Legendre de la fonction  $f(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$  sur  $(-1, +1)$ .  
*S. Bernstein (Leningrad).*

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. VI. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 284—326 (1934).

One of the well-known results of the author asserts that, if a trigonometrical series  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  (I) has coefficients  $o(n)$ , (II) is everywhere summable by Abel's method to a finite and  $L$ -integrable function  $f(x)$ , the series is the Fourier series of  $f(x)$  (we quote the most important special case of a more general result). In the present paper the author generalizes that theorem by relaxing condition (I), which is now replaced by

$$\frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} \sin \nu x - b_{\nu} \cos \nu x) \rightarrow 0$$

for all  $x$ . The remaining part of the paper contains a number of results on the term-by-term differentiation of trigonometrical series. In particular, the author shows that, if  $\sum a_n$  is summable by  $k$ -th Riemann's method, i.e. if  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\sin n\theta}{n\theta} \right)^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) converges in the neighbourhood of  $\theta=0$  to a function which is continuous at  $\theta=0$ , and if  $k>2$ , the series  $\sum a_n$  need not be summable by Abel's method. Examples are actually constructed for  $k=3$  and  $k=4$ . (V. see this Zbl. 8, 310.)

A. Zygmund (Wilno).

Kaczmarz, S.: Notes on orthogonal series. I. Studia Math. 5, 24—28 (1935).

Das System  $\{\varphi_n(t)\}$  sei orthonormal und die Entwicklung  $\sum a_n \varphi_n(t)$  mit konvergentem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  summabel mittels eines bestimmten linearen Summationsverfahrens  $T$ . Es gibt dann eine Indexfolge  $n_i$ , die nur von dem Orthogonalsystem und von  $T$  abhängt, so daß die Folge der  $n_i$ -ten Abschnitte der obigen Entwicklung fast überall konvergiert. Im Falle der Cesàroschen Summabilität reduziert sich dieser Satz auf ein interessantes Resultat von Kolmogoroff [Fundam. Math. 5, 96 (1924)]. — Sind die „Lebesgueschen Funktionen“

$$Q_n(t) = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{i-1}{n} \right) \varphi_i(t) \varphi_i(u) \right| du \leq w_n,$$

wo  $w_n$  monoton abnimmt, ist ferner  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w_n^2$  konvergent, so ist  $\sum a_n \varphi_n(t)$  fast überall (C, 1)-summabel. Szegő (St. Louis, Mo.).

Lord, R. D.: On some relations between the Abel, Borel, and Cesàro methods of summation. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 241—256 (1934).

Cinq théorèmes démontrés dans cet article concernant les procédés mixtes obtenus par superposition du procédé d'Abel (A) ou de celui (B) de M. E. Borel aux moyennes arithmétiques de Cesàro. On introduit ainsi

$$f_q(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(q)} \cdot x^n \equiv q(1-x)^q \cdot \int_1^{\frac{1}{1-x}} \left( \frac{1}{1-x} - \omega \right)^{q-1} \cdot f_0\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) d\omega$$

$$h_q(u) = e^{-u} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(q)} \cdot \frac{u^n}{n!} = \frac{q}{u^q} \int_0^u (u-t)^{q-1} \cdot h_0(t) \cdot dt$$

où  $s_n^{(q)}$  est la  $n$ -ième moyenne de Cesàro d'ordre  $q$  relative à une série  $\sum a_n$ . Les théorèmes 1, 2 et 4 évaluent l'ordre d'infinitude pour  $n \rightarrow \infty$  de la moyenne  $s_n^{(\alpha+1)}$  qui correspond aux hypothèses  $f_q(x) = o[(1-x)^{-p}]$  ou  $h_q(t) = o[t^p]$  accompagnées par d'autres relatives à l'ordre de  $s_n^{(\alpha)}$  ou de  $\alpha \cdot [s_n^{(\alpha-1)} - s_n^{(\alpha)}]$ . Ces théorèmes pour  $p=0$



se réduisent aux résultats connus relatifs à la sommabilité  $(C, \delta)$  et dont ils constituent les généralisations. Les théorèmes 3 et 5 déduisent  $(C, \delta)$  de  $\Sigma a_n$  de la sommabilité mixte  $(C, q)$  (A) ou  $(C, q)$  (B). Ainsi (th. 3) de

$$|\arg(na_n + Kv_n)| \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{où} \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n \sim n^{p+1}$$

et

$$\lim_{z=1} \left\{ q(1-z)^{-q} \cdot \int_z^1 (t-z)^{q-1} f_0(t) dt \right\} = s$$

découle  $\lim_{n=\infty} s_n^{(\beta)} = s$  pour  $\beta > q \geq p$  ou  $\beta \geq p > q$ . De même (th. 5) de  $s_n^{(\alpha)} + Kn^p \geq 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $p \geq \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n=\infty} h_q(u) = s$ ,  $\partial \leq q \leq \alpha + 1$  l'auteur déduit  $\lim_{n=\infty} s^{(\alpha+2p)} = s$ .

*E. Kogbetliantz* (Téhéran).

**Kuttner, B.:** The relation between Riemann and Cesàro summability. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 273—283 (1934).

Le procédé de sommation  $(R, k)$  de Riemann attache à une série  $\sum a_n$  la somme généralisée  $s$  ainsi définie

$$s = \lim_{h=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^k. \quad (k = E(k) > 0)$$

Il a été prouvé par Kogbetliantz [Jour. de Liouv. 5, 134—141 (1926)] que la sommabilité  $(C, k - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , d'une série entraîne celle  $(R, k + 1)$ . D'autre part Zygmund a démontré que  $(R, 1)$  entraîne  $(C, 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . — L'auteur a construit un exemple remarquable d'une série divergente sommable  $(R, 3)$  mais non sommable  $(C, \delta)$  quelque grand que soit  $\delta$ , car non-sommable par le procédé d'Abel. Il a démontré en outre que la sommabilité de  $\sum a_n$  par  $(R, 2)$  assure celle  $(C, 3 + \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  ainsi que celle  $(\log n, 2)$  sans aucune autre condition imposée à la série tandis que ces résultats n'ont été prouvés jusqu'ici que sous la condition supplémentaire que  $\sum n^{-2} \cdot \alpha_n \cdot \cos nh$  doit être une série de Fourier. Les preuves sont basées sur les théorèmes relatifs à la multiplication formelle des séries trigonométriques.

*E. Kogbetliantz* (Téhéran).

### Differentialgleichungen:

**Victoris, L.:** Über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration. II. Mh. Math. Phys. 41, 384—391 (1934).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 4, 148) wurde für die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Klasse von Iterationen angegeben, die eine Verallgemeinerung der Picardschen sukzessiven Approximation darstellen. Hier wird eine spezielle solche Iteration näher behandelt und ein Integralkonstrukt beschrieben, den der Autor konstruiert hat.

*Rellick* (Marburg, Lahn).

**Marchaud, André:** Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1278—1280 (1934).

A chaque point  $m$  du domaine  $R$ ,  $0 \leq x \leq 1$  de l'espace euclidien à trois dimensions rapporté aux axes rectangulaires, est attaché un demi-cône convexe  $C(m)$  variant d'une manière continue avec  $m$ ; l'angle de chaque droite de  $C(m)$  avec  $Ox$  est  $\leq c < \frac{\pi}{2}$ ; alors le champs  $[C(m)]$  est dit continu et borné en direction (par rapport à  $Ox$ );  $-C(m)$  est le demi-cône opposé à  $C(m)$ . Une intégrale du champs  $[C(m)]$  est un arc simple dont les contingents antérieur et postérieur dans chaque point  $m$  se trouvent dans  $C(\bar{m})$  resp.  $-C(\bar{m})$ . L'émission d'un ensemble  $A \subset R$  est l'ensemble des points de  $R$  par chacun desquels passe une intégrale issue d'un point de  $A$ . Une intégrale-frontière est une intégrale dont les contingents en chaque point appartiennent aux frontières de  $C(\bar{m})$  et de  $-C(\bar{m})$ . Si  $C(m)$  en chaque point de  $R$  se réduit à une demi-droite, on a un système d'équations différentielles. L'auteur énonce une série de théorèmes généralisant des propriétés des intégrales d'équations différentielles.

*W. Stepanoff* (Moskau).

**Marchaud, A.:** Sur les équations différentielles du 1<sup>e</sup> ordre. Critère d'unicité, critère de multiplicité. *Mathematica, Cluj* 10, 5—31 (1935).

Le mémoire contient les démonstrations des théorèmes énoncés par l'auteur dans la note „Critères d'unicité et de multiplicité pour les intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre“ [C. R. Acad. Sci., Paris 196, 597—599 (1933); ce Zbl. 6, 201].

*W. Stepanoff (Moskau).*

**Antoine, L.:** Les intégrales singulières de l'équation différentielle de Lagrange. *Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles* 1, 70—74 (1934).

Les intégrales singulières d'une équation de Lagrange qui n'appartient pas au type de Clairaut, s'ils existent, sont des droites; toute autre droite intégrale a un contact en un seul point avec les courbes intégrales. Les fonctions données sont supposées analytiques.

*W. Stepanoff (Moscou).*

**Denjoy, Arnaud:** Sur l'intégration des différentielles totales. *Mathematica, Cluj* 10, 117—124 (1935).

L'article est identique à celui inséré dans le *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* 7, 580—587 (1934), ce Zbl. 9, 256; voir aussi ce Zbl. 6, 202.

*W. Stepanoff (Moskau).*

**Russyan, C.:** Relation entre le système d'équations aux différentielles totales et celui d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre. *Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8*, 51—55 (1933.)

This paper contains an exposition of the duality between a completely integrable pfaffian system  $S$  and the completely integrable system  $T$  of linear homogeneous partial differential equations of the first order satisfied by its integrals. The duality is expressed as follows:  $S$  can be written so that its coefficients constitute a complete set of solutions for the algebraic system arising by replacing the derivatives in  $T$  by unknowns; and vice versa.

*J. M. Thomas (Durham).*

**Russyan, C.:** Généralisation d'un théorème de la théorie des équations aux dérivées du premier ordre. *Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8*, 57—60 (1934).

Let the brackets  $[F_i, F_j]$  vanish by virtue of the system  $F_i(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ), which is solvable for  $z, p_1, \dots, p_{r-1}$ . The author proves that if  $z$  is a function of the  $x$ 's alone, it satisfies the system of partial differential equations obtained from the above system by the substitution  $p_i = \partial z / \partial x_i$ . This result is a generalization of a well known theorem [Goursat, *Equations du premier ordre*, 288 (1921)].

*J. M. Thomas (Durham).*

**Makaroff, A.:** Sur une propriété des intégrales complètes des rangs supérieurs de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre:  $\frac{dz}{dx} = \theta(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y})$ . *Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8*, 61—68 (1934).

The paper gives a method of obtaining the complete integrals of various ranks (Russyan, this Zbl. 6, 348) for the equation indicated in the title. *J. M. Thomas.*

**Ghermanesco:** Sur les moyennes successives des fonctions. *Bull. Soc. Math. France* 62, 245—264 (1934).

This paper is concerned with the properties of successive mean values of a function  $u$  of  $p$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , taken through the interior or over the surface of a hypersphere. If  $S_p$  is the hypersphere of radius  $R$  and centre  $P$ , the successive means at  $P$  of the function  $u$  are defined by the relations

$$m_0(u) = \frac{1}{S_p} \int_{S_p} u(M) dS_p,$$

$M$  being a variable point of the surface  $S_p$ ; and

$$m_i = \frac{p + 2i - 2}{R^{p+2i-2}} \int_0^R R^{p+2i-3} m_{i-1} dR.$$



It is shown that  $m_0$  satisfies the partial differential equation

$$\Delta m_0 = \frac{\partial^2 m_0}{\partial R^2} + \frac{p-1}{R} \frac{\partial m_0}{\partial R},$$

where

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2};$$

and the corresponding equation satisfied by  $m_i$  is given. As applications, theorems are given concerning " $n$ -metaharmonic" functions, that is functions satisfying an equation of the form  $\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \dots + \lambda_n u = 0$ .

For example, it is shown that the mean  $m_0$  of an  $n$ -metaharmonic function satisfies a linear differential equation of order  $n$ , with the radius  $R$  as independent variable.

W. N. Bailey (Manchester).

**Wavre, R.:** Sur les intégrales de Fourier et la représentation de certaines fonctions harmoniques multiformes. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 16) **51**, 120—122 (1934).

**Wavre, R.:** Sur la représentation de certaines fonctions harmoniques multiformes. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 16) **51**, 174—175 (1934).

**Hornich, Hans:** Eine Verallgemeinerung der zweiten Randwertaufgabe. Mh. Math. Phys. **41**, 445—450 (1934).

Eine Behandlung der inhomogenen Randwertaufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial s} \sin \alpha(s) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos \alpha(s) = g(s).$$

Ist der Zuwachs von  $\alpha(s)$  gleich  $2\pi\mu$ , so darf man im Falle  $\mu \geq 1$  den Wert von  $\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  in  $\mu - 1$  Punkten vorschreiben. Im Falle  $\mu < 1$  ist es dagegen für die Lösung der Randwertaufgabe notwendig und hinreichend, daß zu jedem System von  $1 - \mu$  Punkten eine, gewissen Bedingungen genügende analytische Funktion existieren soll.

Ahlfors (Helsingfors).

**Svetlov, A., et V. Stroganov:** Sur la résolution d'un problème plan de magnétisme. C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 113—115 u. franz. Text 115—118 (1934) [Russisch].

Ein Problem aus der Theorie des Magnetismus führt auf die Aufgabe: Es sind zwei Potentialfunktionen  $V(u, v)$  und  $V_1(u, v)$  zu bestimmen, die im Äußeren bzw. im Inneren einer geschlossenen Kontur  $C$  regulär seien; auf  $C$  gelte

$$V = V_1; \quad \partial V / \partial n_a + \mu \partial V / \partial n_i = (\mu - 1) f$$

( $n_a, n_i$  äußere bzw. innere Normale,  $\mu$  Permeabilitätskonstante,  $f$  eine längs  $C$  gegebene Funktion mit  $\int_C f dl = 0$ ). Zur Lösung dieser Aufgabe denkt man sich das

von  $C$  berandete Gebiet auf den Einheitskreis abgebildet und bestimmt  $V$  aus dem bekannten Ansatz  $V = \sum_{m=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$ . Entsprechendes für  $V_1$ . Genauere Konvergenzbetrachtungen sollen in einer späteren Arbeit durchgeführt werden.

Rellick (Marburg, Lahn).

**Weyrich, Rudolf:** Über einige Randwertprobleme, insbesondere der Elektrodynamik. J. reine angew. Math. **172**, 133—150 (1934).

Verf. betrachtet Lösungen der Wellengleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , welche in Zylinderkoordinaten nur Funktionen von  $r$  und von  $z$  sind, also zylindrische Symmetrie aufweisen. Hierbei ist  $k^2$  eine zunächst stückweise stetige Funktion von  $r$  allein. Die allgemeine Lösung einer Randwertaufgabe mit dieser Wellengleichung in den genannten Koordinaten läßt sich als unendliches Integral (als Grenzwert einer Summe) über Partikularlösungsprodukte schreiben, die aus je einer Exponentialfunktion von  $z$  und einer Besselschen bzw. Hankelschen Funktion von  $r$  bestehen. Letztere Funktionen haben die Ordnung 0. Nach einigen Bemerkungen über das Erfüllen der Rand-

bedingungen bei  $r = 0$ ,  $r = \infty$  und bei den Übergangsstellen der verschiedenen Funktionen  $k^2$  von  $r$  sowie über das singuläre Verhalten der Integranden weist Verf. auf die einschlägigen Arbeiten von A. Sommerfeld und von H. Weyl hin, die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entlang der ebenen Erdoberfläche behandeln, welche von einem Dipol ausgesandt werden. Er behandelt sodann ausführlich die Ausstrahlung eines in der Koordinatenachse befindlichen elektrischen Dipols in ein zylindrisch geschichtetes Medium. Für den allgemeinen Fall begnügt er sich mit der Aufstellung des lösenden Integralausdrucks. Sodann behandelt er ausführlich die Fälle: a) inneres Medium endlicher Permeabilität und Leitfähigkeit umgeben von unendlich gut leitendem Mantel; b) Leitfähigkeit des inneren Mediums 0; c) strahlender magnetischer Dipol unter ähnlichen Bedingungen. In den Spezialfällen werden numerisch auswertbare Lösungen erzielt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Uller, Karl:** Die Entwicklung des Wellen-Begriffes. VIII. I. Tl. Herleitung der Welle von elementarer Schwingungsform; Kritik des Lösungsansatzes. Gerlands Beitr. Geophys. 43, 289—295 (1934).

Nach kurzer Darstellung der bisher üblichen Behandlungsweise von raumzeitlichen Differentialgleichungen für ein Vektorfeld zeigt Verf., daß der übliche Lösungsansatz keine Lösung in seinem Sinne ist, und geht — wie schon oft — auf die psychologischen und historischen Gründe ein, welche zur Einbürgerung der gebräuchlichen Betrachtungsweise von raumzeitlich veränderlichen Feldern, trotz der Einwände des Verf., geführt haben. (VII. vgl. dies. Zbl. 8, 331.)

S. Gradstein (Hoog-Laren).

**Quade, W.:** Die Schwingungsvorgänge in Systemen mit zwei Freiheitsgraden. (Hauptvers. d. Ges. f. Angew. Math. u. Mech., Bad Pyrmont, Sitzg. v. 9.—14. IX. 1934.) Z. angew. Math. Mech. 14, 365—366 (1934).

Kurzer Bericht über die Ergebnisse einer Klassifikation der Systeme von zwei Freiheitsgeraden im Falle freier Schwingungen. Es ergeben sich 14 wesentlich (insbesondere 9 auch im Sinne der Elementarteilertheorie) voneinander verschiedene Schwingungsvorgänge; von diesen sind 9 aperiodisch, 3 periodisch und 2 von gemischtem Typus. Im übrigen wird auf eine frühere Schrift des Verf.: Klassifikation der Schwingungsvorgänge in gekoppelten Stromkreisen (dies. Zbl. 8, 232), verwiesen.

Haupt (Erlangen).

### Spezielle Funktionen:

**Geronimus, J.:** On a class of appell polynomials. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 13—23 (1934).

Es werden die Polynome  $\omega_n(x, y)$  mit der erzeugenden Funktion  $e^{hx}(1+h)^y f(h)$  untersucht, wobei  $f(h)$  eine gegebene Potenzreihe ist. Sie besitzen die Eigenschaft

$$\Delta_y \omega_n(x, y) = \omega_n(x, y+1) - \omega_n(x, y) = n \omega_{n-1}(x, y).$$

Weiter werden formale Sätze verschiedener Art über die  $\omega_n(x, y)$  bewiesen, ein Entwicklungssatz abgeleitet und mehrere Spezialfälle (Bernoullische, Eulersche, Laguerresche Polynome usw.) betrachtet.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Koschmieder, Lothar:** Eine Schranke für die Summe der ungraden Kugelfunktionen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 44, 255—258 (1934).

Fejér hat für die Legendreschen Polynome  $P_k(x)$  bewiesen:  $\sum_{k=0}^n P_k(x) \geq 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  [Math. Ann. 67, 83 (1909)]. Hieraus folgt, daß auch  $\sum_{k=0}^n P_{2k}(x) \geq 0$  ist (Koschmieder, Rev. mat. hisp.-amer. (2) 1929, 189). Für die ungraden Kugelfunktionen ist es nicht so einfach, eine untere Schranke des Ausdrucks  $x \sum_{k=0}^n P_{2k+1}(x)$  zu gewinnen. Der Verf. zeigt, daß

$$x \sum_{k=0}^n P_{2k+1}(x) > -\frac{1}{4}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Dieses Ergebnis folgt als Sonderfall der umfassenderen Ungleichung

$$2x \sum_{k=0}^n A_{2k+1}(x) > \frac{\lambda^2 + 2\lambda - 11}{(1+\lambda)(3+\lambda)},$$

wo die Größen  $A_k(x)$  die von dem Ausdruck

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) z^k$$

erzeugten Gegenbauerschen Polynome sind, und  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$  ist. Das obige Ergebnis folgt hieraus für  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Der Beweis beruht wesentlich auf dem Fejérschen Ergebnisse  $\sum_{k=0}^n A_k(x) > 0$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$  [Mat. fiz. Lap. 38, 161—164 (1931); dies. Zbl. 3, 352].

S. C. van Veen (Dordrecht).

**Varma, R. S.:** Some definite integrals for the parabolic cylinder functions. Proc. Benares Math. Soc. 15, 21—27 (1933).

Durch Zerlegung der bekannten Integraldarstellung für die Funktionen des parabolischen Zylinders (Weber-Hermiteische Funktionen):

$$D_n(z) = -\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int e^{-zt - \frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1} dt$$

in drei Teile und einfache Umformung wird die bereits früher von G. Prasad erhaltene Formel

$$D_n(z) = (-1)^{\frac{n!}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_0^{\pi} e^{-z \cos \Phi - \frac{1}{2} \cos 2\Phi} \cos(z \sin \Phi + \frac{1}{2} \sin 2\Phi + n\Phi) d\Phi$$

abgeleitet. Weitere einfache Umformungen des Integrationsweges beim zuerst genannten Integral ergeben Formeln ähnlich bekannten Darstellungen für die Gammafunktion, die für besondere Werte von  $n$  gelten und teilweise früher bereits von Whittaker erhalten waren, ohne jedoch einfacher zu sein als das obengenannte Ergebnis.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Meijer, C. S.:** Einige Integraldarstellungen für Whittakersche und Besselsche Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 805—812 (1934).

Der Verf. stellt einen neuen Integralausdruck für die Whittakersche Funktion  $W_{k,m}(z)$  auf, der den für die parabolische Zylinderfunktion  $D_n(z)$  geltenden Integralausdruck

$$D_n(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\Gamma(-n)} \int_0^{\infty} e^{-zt - \frac{1}{2}t^2} t^{-n-1} dt \quad (\Re(n) > 0) \quad (1)$$

( $D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2)}$ ) als Spezialfall enthält. Er findet für diesen Integralausdruck

$$W_{k,m}(\zeta^2) = \frac{4\zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k) \Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} \int_0^{\infty} e^{-u^2} K_{2m}(2\zeta u) u^{-2k} du \quad (\Re(\frac{1}{2} \pm m - k) > 0) \quad (2)$$

Hierin ist  $K_\nu(w) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(1)}\left(w e^{\frac{\pi i}{2}}\right)$ . Der Ausdruck (2) gilt, im Gegensatz zu den früher abgeleiteten Integraldarstellungen für alle Werte von  $\arg \zeta$ . (1) folgt aus (2) für  $k = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$ ,  $m = -\frac{1}{4}$ ,  $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$  und  $\zeta = \frac{z}{\sqrt{2}}$ , wegen  $K_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w}$ . Der Verf. leitet eine viel allgemeinere Integraldarstellung für  $W_{k,m}(\zeta^2)$  ab, die (2) als Spezialfall enthält, nämlich

$$W_{k,m}(\zeta^2) = 2e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \Phi(k, m, \alpha, \zeta^2 u^2) u^{2\alpha-1} du \quad (3)$$

( $2m$  nicht ganz,  $\alpha$  beliebig, mit  $\Re(\frac{1}{2} \pm m + \alpha) > 0$ ). — Auch dieser Ausdruck gilt für alle Werte von  $\arg \zeta$ . Hierin ist:

$$\Phi(k, m, \alpha, w) = \frac{\Gamma(-2m) w^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k) \Gamma(\frac{1}{2}+m+\alpha)} {}_1F_2(\frac{1}{2}+m-k; 1+2m, \frac{1}{2}+m+\alpha; w) \\ + \frac{\Gamma(2m) w^{-m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k) \Gamma(\frac{1}{2}-m+\alpha)} {}_1F_2(\frac{1}{2}-m-k; 1-2m, \frac{1}{2}-m+\alpha; w),$$

${}_1F_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; w)$  ist eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion). Als Spezialfälle von (3) ergeben sich u. a.

$$I_\nu(\zeta^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2} \int_0^\infty e^{-u^2} J_{2\nu}(2\sqrt{\zeta} u) du, \quad \Re(\frac{1}{2} + \nu) > 0,$$

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(\zeta^2) &= 2e^{-\zeta^2} \int_0^\infty e^{-u^2} J_\nu^2(\zeta u \sqrt{2}) u du \\ \text{und} \\ K_\nu(\zeta^2) \sin \nu \pi &= \pi e^{-\zeta^2} \int_0^\infty e^{-u^2} \{I_{-\nu}^2(\zeta u \sqrt{2}) - I_\nu^2(\zeta u \sqrt{2})\} u du \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Re(\nu) > -1 \text{ bez. } |\Re(\nu)| < 1, \\ & \end{aligned}$$

von denen die ersten zwei schon bekannt waren.

*S. C. van Veen* (Dordrecht).

**Bailey, W. N.:** Some theorems concerning products of hypergeometric series. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 377—384 (1934).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen Whipples [J. London Math. Soc. 2 (1927) und 4 (1929) sowie Proc. London Math. Soc. (2) 25 (1926) und (2) 26 (1927)] werden Potenzreihendarstellungen für Produkte hypergeometrischer Reihen gegeben.

*v. Koppenfels* (Hannover).

**Saksena, Bishambhar Dayal:** On the reduction of certain abelian integrals by trigonometrical substitutions. Proc. Benares Math. Soc. 15, 29—43 (1933).

Reduktion von vier speziellen Abelschen Integralen auf elliptische Integrale und elementare Funktionen mittels einfacher trigonometrischer Substitutionen. Die Arbeit enthält nur die nackte Rechnung ohne jede Begründung, warum gerade diese Substitutionen angewandt wurden.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

## **Funktionentheorie:**

**Hornich, Hans:** Über den Verlauf des Arguments der Ableitung von analytischen Funktionen längs geschlossener Kurven. Mh. Math. Phys. 41, 392—407 (1934).

Zuerst wird die bekannte Formel  $n - m = \mu - 1$  aufgestellt, wo  $n$  und  $m$  die Anzahl der Nullstellen und Pole von  $f'(z)$  innerhalb einer Kurve  $C$  und  $2\pi\mu$  die gesamte Änderung von  $\arg f'(z)$  bei einem Umlauf bedeuten. Für  $f(z)$  wird unter Anwendung der Greenschen Funktion eine Integraldarstellung hergeleitet. Sind umgekehrt die Randwerte von  $\arg f'(z)$  gegeben, so folgt aus dieser Darstellung, daß eine zugehörige Funktion  $f(z)$  existiert. Die Nullstellen und Pole können beliebig gewählt werden, falls ihre Anzahlen der oben erwähnten Bedingung genügen. — Als Anwendungen wird die konforme Abbildung auf ein Polygon und die homogene Randwertaufgabe

$$\cos \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n} + \sin \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

der Potentialtheorie behandelt.

*Ahlfors* (Helsingfors.)

**Minetti, Silvio:** Sur quelques points de la théorie des fonctions. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1570—1572 (1934).

Einfache Abschätzungen des Real- und Imaginärteiles von im Einheitskreise regulären, am Rande stetigen Funktionen. Einige derselben scheinen früher nicht beachtet worden zu sein.

*Ahlfors* (Helsingfors).

**Noshiro, Kiyoshi:** On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 2, 129—155 (1934).

Es wird unter anderem gezeigt: Jeder Abschnitt einer „sternförmigen“ und „ $k$ -fach symmetrischen“ Potenzreihe  $z + c_1 z^{k+1} + c_2 z^{2k+1} + \dots$  ist sternförmig im Kreise  $|z| < \left(\frac{k}{2(k+1)}\right)^{1/k}$ . Dieser Radius ist genau. Der Fall  $k = 1$  rührt vom Ref.



her [Math. Ann. **100**, 188 (1928)], den Fall  $k = 2$  hat S. Takahashi behandelt [Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) **16**, 7 (1934); dies. Zbl. **8**, 168]. Die Methode ist der in der erstzitierten Arbeit nachgebildet.  
G. Szegö (St. Louis, Mo.).

**Montel, Paul: Le rôle des familles normales.** Enseignement Math. **33**, 5—21 (1934).

Berner Vortrag, in dem eine Übersicht über die Methoden, Ergebnisse und insbesondere auch die Problemlage in der Theorie der Normalfamilien gegeben wird.  
Ulrich (Göttingen).

**Lavrentieff, M.: Zur Theorie der konformen Abbildungen.** Trav. Inst. phys.-math. Stekloff **5**, 159—245 (1934) [Russisch].

The author studies extremal problems in the theory of conformal mapping of simply connected regions. The first part of the paper is devoted to a discussion of the variation of the mapping function of a region under a variation of the boundary of the region. These results are applied to the following problem: Let  $\{D\}$  be the family of simply connected regions in the plane containing the origin and not containing  $n$  given points  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Denoting by  $w = f(z, D)$ ,  $f(0, D) = 0$ , a function which maps  $D$  conformally on  $|w| < 1$ , it is required to find that region  $D_0$  of the family for which  $|f'(0, D)|$  assumes the least value. It is proved that if  $\Gamma$  denotes the boundary of  $D_0$  the following three conditions are necessary and sufficient that  $D_0$  shall possess the above minimizing property: 1. Every point of the plane belongs either to  $D_0$  or to  $\Gamma$ . 2.  $\Gamma$  consists of a finite number of simple analytic arcs. The points  $a_1, a_2, \dots, a_n$  are end points of  $n$  distinct arcs. Every point of  $\Gamma$  distinct from all  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), either belongs to a single arc and is then a regular point of  $\Gamma$  or is an end point of at least three arcs. 3. To every arc  $\alpha\beta$  consisting of regular points of  $\Gamma$  there correspond in the conformal map of  $D_0$  on  $|w| < 1$  two arcs of equal length on the circumference  $|w| = 1$ . The topological details of the proof are not completely carried out. The case  $n = 1$  of the problem has been treated by Koebe. The same problem for multiply connected regions was considered with different methods by Pólya (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1929**, 55). A special result following from the preceding theory is: If  $w = f(z)$ ,  $f(0) = 0$ , maps a simply connected region not containing the points  $z_0$  and  $-kz_0$ , ( $k > 0$ ), on the circle  $|w| < 1$ , then  $|f'(0)| \geq \frac{1+k}{4k|z_0|}$ , the sign of equality holding if  $z = \frac{4kz_0}{1+k} \frac{w}{w^2 - 2\frac{1-k}{1+k}w + 1}$ . An analogous result is

established for simply connected regions not containing the points  $re^{i(\varphi_0 + \frac{2k\pi}{n})}$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (cf. H. Grötzsch, Ber. sächs. Ges. Wiss. **1928**, 373). The development is applied to finding various estimates in the conformal mapping of simply connected regions on a circle. Two notions are introduced: 1. If  $D$  is a simply connected region, the relative distance  $d_r(z_1, z_2)$  between two arbitrary interior points  $z_1$  and  $z_2$  of  $D$  is the greatest lower bound of lengths of polygons belonging to  $D$  and connecting  $z_1$  and  $z_2$ . 2. If  $D$  is mapped conformally on  $|w| < 1$  and if  $z'$  is a point of the boundary of  $D$  which is mapped into a single point  $w_0$  of  $|w| = 1$ , let  $z_1$  be an interior point of  $D$  and  $w_1$  the corresponding point of  $|w| < 1$ . Construct a circle  $C$  interior to  $|w| < 1$  tangent to  $|w| = 1$  in  $w_0$  and containing  $w_1$ . Let  $D_1$  be the subregion of  $D$  corresponding to  $C$ . The relative distance  $d_r(z_1, z')$  is defined as  $\lim_{z \rightarrow z'} d_r(z_1, z)$ , where  $z$  remains within  $D_1$  and the

radius of  $C$  is taken arbitrarily near to one. Among the numerous estimates given we single out one: Let  $D$  be a simply connected region containing the segment  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$  of the real axis, the points  $z = -\varepsilon$ ,  $z = +\varepsilon$  being on the boundary of  $D$ . Let  $z^0$  and  $z_1^0$  be two points of  $D$  such that 1.  $d_r(0, z^0) \geq r + \varepsilon$ ,  $d_r(0, z_1^0) \geq r + \varepsilon$  and 2. every curve in  $D$  connecting  $z^0$  and  $z_1^0$  crosses the segment  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ . If  $w = F(z)$  is a function which maps  $D$  on  $|w| < 1$  so that  $F(z^0) = 0$ , then  $0 < 1 - |F(z_1^0)| < 2 \frac{\varepsilon^2}{r^2}$ . —

These estimates are applied to give a sufficient condition on a set of boundary points of a simply connected region which in the conformal map of the region on a circle corresponds to a set of zero measure on the circumference. The paper concludes with a proof of the following important theorem: Let  $E$  be an arbitrary bounded, nowhere dense continuum not decomposing the plane. Let  $f(z)$  be an arbitrary function of a complex variable  $z$  defined and continuous on  $E$ . Then  $f(z)$  may be represented on  $E$  by a uniformly convergent series of polynomials. *W. Seidel* (Cambridge).

**Bouligand, G.:** *Sur certaines fonctions entières.* Bull. math. Fac. Sci. et grandes Ecoles **1**, 65—70 (1934).

$L$  sei die Begrenzung des Halbstreifens  $x > \lambda$ ,  $|y| < h$ . Man bildet mit Hilfe einer passenden analytischen Funktion  $f(\zeta)$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - x}.$$

Es wird gezeigt, daß man in dieser Weise nicht identisch verschwindende ganze Funktionen konstruieren kann, welche übriges von  $\lambda$  unabhängig sein werden. Die Eigenschaften dieser Funktionen werden untersucht. *Ahlfors* (Helsingfors).

**Dinghas, Alexander:** *Über einen Satz von Milloux.* Math. Z. **39**, 590—596 (1935).

Die Resultate dieser Arbeit sind alle einfache Folgerungen der von den Brüdern Nevanlinna in ihrer bekannten Abhandlung „Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie“ (Acta Fenn. **50**, 5) entwickelten allgemeinen Methode. Es handelt sich dabei nur um die Behandlung einer allbekannten Frage durch Übergang zu der logarithmischen Ebene. *Ahlfors*.

**Soula, J.:** *Sur les fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier à l'intérieur d'un angle.* Mathematica, Cluj **10**, 81—91 (1935).

Anwendungen der Methode von R. und F. Nevanlinna (vgl. vorst. Referat). Bemerkenswert ist ein rascher Beweis des Fabryschen Lückensatzes. *Ahlfors*.

**Selberg, Henrik L.:** *Einige Darstellungssätze aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.* Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1934**, 1—15 (Nr 10).

Es wird gezeigt, daß Quotienten und Wurzeln aus Ausdrücken der Form

$$w(z) = \sum_{\nu=1}^n g_{\nu}(z) e^{a_{\nu} z^p}$$

sich stets wieder in dieser Form darstellen lassen; dabei ist  $p$  eine natürliche Zahl,  $a_{\nu}$  beliebig reell oder komplex, und die  $g_{\nu}(z)$  sind ganze Funktionen von kleinerer Ordnung als  $p$ . Darin liegt eine teilweise Verallgemeinerung eines Satzes von Ritt [Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929)], der im Spezialfall  $p = 1$  und  $g_{\nu}(z) = \text{konst.}$  gezeigt hat, daß jede algebraische Funktion eines solchen „Exponentialpolynoms“ selbst ein Exponentialpolynom ist, wenn sie eine ganze Funktion von  $z$  ist. Selberg stützt seinen Beweis auf die scharfe, Nevanlinnasche Fassung des Phragmén-Lindelöfschen Satzes. — Die Frage hängt zusammen mit der Herstellung algebraoider Funktionen, die gewisse Werte mit festen Vielfachheiten annehmen und eine Defektrelation besitzen, in der die Defektschranke  $2k$  erreicht wird. *Ulrich* (Göttingen).

**Csillag, Paul:** *Über ganze Funktionen, welche drei nicht verschwindende Ableitungen besitzen.* Math. Ann. **110**, 745—752 (1935).

L'auteur généralise un th. de Saxer (Math. Z. **17**) en montrant que: Si trois des dérivées d'une fonction entière n'ont pas de zéros, le logarithme de cette fonction est un polynôme linéaire. Il emploie l'identité de Borel (Acta math. **20**) en introduisant une majorante très commode et très simple des  $f$ , qui y figurent, et la borne, fournie par la méthode de R. Nevanlinna, du module d'une  $f$ , entière sans zéros connue comme le quotient de deux  $f$ , entières. Ceci lui permet d'établir ce lemme se rattachant au th. de Borel et dont découle son résultat: Une identité  $a_0(z) = \sum a_i(z) e^{g_i(z)}$ , où les  $a_i(z)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sont „majorés“ par



le plus grand des maxima, supposé non constant, des parties réelles des  $g_i(z)$  pour  $|z| = r$ , entraîne la dépendance linéaire des fonctions  $a_i(z) e^{g_i(z)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). G. Valiron (Paris).

**Ghermanesco, M.:** Sur la surface exceptionnelle d'un système de fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1568—1570 (1934).

L'a. complète ses résultats précédents (voir ce Zbl. **10**, 121). Il donne des cond. néces. et suf. pour qu'une f. entière d'ordre fini  $p$ , définie par ses coef. tayloriens, ne possède que  $m$  zéros. Il signale que, dans le cas des combinaisons linéaires de  $n$  fonctions, la définition de la surface exceptionnelle (au sens de l'a.) donnée dans la Note préc., ne nécessite pas que ces f. soient linéairement indépendantes; mais, lorsqu'elles sont dépendantes, la surface se décompose. G. Valiron (Paris).

**Viola, Tullio:** Allure des courbes sur lesquelles les fonctions holomorphes d'une suite uniformément convergente prennent les mêmes valeurs que la fonction limite sur une courbe donnée. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1368—1370 (1934).

Es konvergiere die Folge  $f_n(z)$  innerhalb eines Gebietes  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig gegen  $F(z)$ ;  $\mathfrak{C}$  sei irgendeine Kurve ganz in  $\mathfrak{G}$ , für deren Parameterdarstellung  $\{x(t), y(t)\}$  die ersten  $s$  Ableitungen existieren. Liegt  $z$  auf  $\mathfrak{C}$ , so sei  $z_n$  definiert durch  $f_n(z_n) = F(z)$  mit  $z_n \rightarrow z$ .  $z_n$  durchläuft dann eine Kurve  $\mathfrak{C}_n = \{x_n(t), y_n(t)\}$ , wenn  $z$   $\mathfrak{C}$  durchläuft, und auch für diese existieren die ersten  $s$  Ableitungen; zugleich konvergieren sie alle gleichmäßig  $x_n^{(\sigma)}(t) \rightarrow x^{(\sigma)}(t)$ ,  $y_n^{(\sigma)}(t) \rightarrow y^{(\sigma)}(t)$ , ( $\sigma \leq s$ ). Dieser naheliegende Satz wird zunächst für den Fall ausgesprochen, daß  $F'(z)$  auf  $\mathfrak{C}$  nicht verschwindet, dann aber auch in dieser Richtung verallgemeinert. Ulrich (Göttingen).

**Viola, T.:** Sull'accumulazione dei valori delle funzioni olomorfe di due variabili, che formano una successione uniformemente convergente. Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 288—291 (1934).

Für eine Folge regulär analytischer Funktionen zweier komplexer Veränderlichen,  $f_n(z, z')$ , die innerhalb eines vierdimensionalen Gebietes  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $F(z, z')$  konvergieren, wird die Punktmenge in  $\mathfrak{G}$  untersucht, wo die  $f_n$  diejenigen Werte annimmt, welche  $F$  auf einem abgeschlossenen Teilbereich  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$  annimmt. Eine Reihe von Sätzen, die der Verf. früher bei dem entsprechenden Problem bei Funktionen einer komplexen Veränderlichen erhalten hat, lassen sich übertragen [J. Math. pures appl. (9) **12** (1933); dies. Zbl. **8**, 21]. Ulrich (Göttingen).

## Geometrie.

● **Haussner, Robert:** Analytische Geometrie des Raumes. (Samml. Göschen. Nr. 89.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1935. 132 S. u. 36 Fig. RM. 1.62.

● **Dal Buono, Ugo:** Geometria deduttiva. Vol. 1. Teorie e costruzioni fondamentali. Vol. 2. Geometria metrica. Bologna: Tipogr. Azzoguidi 1934. 178 S.

**Minois, Serge:** Sur l'affinité complexe. Mathesis **48**, 423—426 (1934).

Durch die „komplexe Affinität“:  $x' = x$ ,  $y' = iy$  wird das absolute Punktpaar in ein reelles, zum absoluten Punktpaare harmonisches Punktpaar transformiert. Ein Kreis geht in eine gleichseitige Hyperbel über. Die Transformation gestattet es daher, auf einfache Weise Eigenschaften dieser Hyperbel aus Eigenschaften des Kreises abzuleiten. E. A. Weiss (Bonn).

**Dose, Bernhard:** Näherungskonstruktionen für die Seite des regulären Siebenecks. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **44**, 291—292 (1934).

Fünf einfache und sehr genaue Konstruktionen für die Seite des regulären Siebenecks. Wenn der Radius des Umkreises als Längeneinheit gewählt wird, ist der Fehler für die genaueste Konstruktion nur  $(0,74 \pm 0,005) 10^{-6}$ . Die Prüfung hat im Mathem. Institut der Universität Heidelberg stattgefunden. O. Bottema (Sappemeer).

Ocagne, M. d': Sur le tranche d'Archimède. Enseignement Math. 33, 73—77 (1934).

Es handelt sich um ein Kreisbogendreieck, gebildet aus drei Halbkreisen (HK) der Durchmesser 1,  $d$ ,  $1 - d$  über gemeinsamem Durchmesser. Man zeichne die drei folgenden Transversalen: 1. die gemeinsame Tangente der beiden kleinen HK, 2. und 3. den HK über der Strecke vom linken (rechten) Eckpunkt zum rechten (linken) HK-Mittelpunkt. Jede dieser Transversalen zerlegt die Figur in zwei Teildreiecke. Mittels einer geeignet gewählten Inversion wird bewiesen: Die beiden Kreise, die man diesen Teildreiecken einschreiben kann, sind einander gleich. (Die Ausgangsfigur wird bei Pappus, coll. IV, 14ff. als  $\alpha\rho\beta\eta\lambda\omicron\varsigma$  bezeichnet.) O. Neugebauer (Kopenhagen).

Matsumura, Isao: Some extensions of Ōue's theorem. Mem. Ryojun Coll. Engrg, Inoue Commemorat. Vol. 29—32 (1934).

Liegen 4, 5 . . . Punkte auf einem Kreise und werden die von je dreien gebildeten Dreiecke betrachtet, so hat Ōue als eine Anwendung der geometrischen Darstellung komplexer Zahlen den Satz bewiesen, daß die Mittelpunkte der Neunpunktekreise bezüglich der Dreiecke ebenfalls auf einem Kreise liegen. — Verf. erweitert diesen Satz für die Fälle der Kugel und Hyperkugel auf Grund zweier Determinanten-Identitäten, wobei die expliziten Beweise nur für den Fall der Kugel durchgeführt werden. Es wird gezeigt: 1. Liegen  $n$  Punkte  $(x_i, y_i, z_i)$  auf einer Kugel, so liegen die  $n$  Punkte  $\{\lambda(s - x_i), \lambda(t - y_i), \lambda(u - z_i)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ebenfalls auf einer Kugel  $S_n$ , deren Mittelpunkt die Koordinaten  $(\lambda s, \lambda t, \lambda u)$  hat und deren Radius  $|\lambda|$  ist, wobei  $s = \sum_{i=1}^n x_i, t = \sum_{i=1}^n y_i, u = \sum_{i=1}^n z_i$  gesetzt sind. 2. Die Mittelpunkte von 5 Kugeln  $S_4$  liegen auf  $S_5$ , die von 6 Kugeln  $S_5$  auf  $S_6$  usw. 3. Für den Fall von Kugeln  $S_4$  werden dann die besonderen Werte  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  betrachtet, wobei sich ergibt, daß die Mittelpunkte der  $S_4$  auf einer Geraden liegen und überhaupt alle Mittelpunkte von Kugeln  $S_4$ , die für die verschiedenen Werte von  $\lambda$  auftreten, kollinear sind. 4. Es werden metrisch spezialisierte Fälle von 3. für  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  herausgestellt und die geometrischen Bedeutungen angegeben. — Ähnliche Resultate folgen für den Fall der Hyperkugel. — Verf. bemerkt, daß sich auch Verallgemeinerungen ergeben, wenn man in den Ōueschen und in seinen Sätzen Kreis, Kugel und Hyperkugel bzw. durch irgendeine Kurve, Fläche oder Hyperfläche ersetzt, was er im Fall einer Fläche näher ausführt: Liegen die  $n$  Punkte  $(x_i, y_i, z_i)$  auf  $f(x, y, z) = 0$ , so liegen die  $n$  Punkte  $\{\lambda(s - x_i), \lambda(t - y_i), \lambda(u - z_i)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) auf der Fläche  $f(s - x/\lambda, t - y/\lambda, u - z/\lambda) = 0$ , die zu  $f(x, y, z) = 0$  ähnlich und ähnlich gelegen ist. M. Steck (Stuttgart).

Ramaswami Aiyar, V.: On circular cylinders circumscribing a tetrahedron. Math. Student 2, 89—93 (1934).

The author gives (without proof) the following theorem: If  $O$  be a point at infinity, whose isogonal conjugate with reference to the tetrahedron  $ABCD$  also lies at infinity, then  $AO, BO, CO, DO$  are generators of a circular cylinder. The locus of  $O$  is therefore a cubic curve  $\Gamma$ , in which the plane at infinity cuts its own isogonal conjugate.  $F_1, F_2, F_3, F_4$  being the faces of the tetrahedron,  $\Gamma$  has a double point if a relation  $F_1 + F_2 = F_3 + F_4$  exists. If two of these conditions hold, that is if e. g.  $F_1 = F_4, F_2 = F_3$ ,  $\Gamma$  breaks up into a line and a conic; if  $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$   $\Gamma$  consists of three lines, each lying in a medial plane of the tetrahedron (a plane which bisects four edges). — The special case, that  $A, B, C, D$  are coplanar.

O. Bottema (Sappemeer, Niederlande).

Altshiller Court, Nathan: Tetrahedral poles and polar planes. Math. Student 2, 107—111 (1934).

Die mit den drei Paaren von Gegenkanten eines Tetraeders verbundenen windschiefen Involutionen ordnen einem Punkte  $x$  drei andere Punkte zu, die die „Polar-



ebene“ des Punktes  $\alpha$  in bezug auf das Tetraeder aufspannen. Einer Geraden, die ein Gegenkantenpaar des Tetraeders schneidet, wird durch die zu den beiden anderen Gegenkantenpaaren gehörigen windschiefen Involutionen ein und dieselbe Gerade, ihre „Polare“ in bezug auf das Tetraeder, zugeordnet. Die Polaren der durch einen Punkt laufenden Treffgeraden von je zwei Gegenkanten des Tetraeders liegen in der Polarebene des Punktes. Usw. Tetraeder, die sich in der Polarität eines anderen selbst entsprechen.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Schilling, Fr.: Die Erzeugung der Polarenverwandtschaft am Kreis durch Modelle** Jber. Deutsch. Math.-Verein. 44, 286—290 (1934).

Es wird ein Apparat beschrieben, der die Polarität am Kreise mechanisch herstellt. Dieser „Kreispolator“ ist ein Peaucellier-Inversor in Verbindung mit einem T-förmigen Lineal (Kreispolarität mal Fußpunktsverwandtschaft am selben Zentrum ergibt die Inversion). An zwei Modellen ist das Entsprechen von Kurven und ihren Singularitäten zu sehen.

*Eckhart* (Wien).

**Strubecker, Karl: Zur Möbius-Involution der Ebene.** Mh. Math. Phys. 41, 439 bis 444 (1934).

Nach einer historischen Einleitung über kreisinvariante Konstruktionen überhaupt wird eine neue Konstruktion der durch zwei Punktepaare  $A, A', B, B'$  bestimmten Möbius-Involution in der Ebene angegeben. Bei der Abbildung der Ebene auf die Kugel entspricht der Möbius-Involution eine windschiefe Involution an zwei in bezug auf die Kugel polaren Geraden. Sind  $A, A', B, B', C, C'$  drei Paare entsprechender Punkte dieser Involution auf der Kugel und ergänzt man diese in bekannter Weise durch zwei Punkte  $D, D'$  zu einem Paare Möbiusscher Tetraeder, so ist, nach Steiner, auch  $D, D'$  ein Paar einander in der Involution zugeordneter Kugelpunkte. Aus der gewonnenen Figur liest man nun unmittelbar folgende Konstruktion für den  $C$  zugeordneten Punkt  $C'$  ab ( $[A'BC]$  bezeichnet den Kreis durch  $A', B, C$ ):

$$[A'BC] \cdot [AB'C] = D, \quad [ABD] \cdot [A'B'D] = C'.$$

Die Vervollständigung der Abbildung der Kugelfigur in der Ebene ergibt eine Kreisfigur ( $8_4, 8_4$ ), in der vier Miquelsche Figuren enthalten sind. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Waerden, B. L. van der, und L. J. Smid: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie.** Math. Ann. 110, 753—776 (1935).

Im 1. Teil wird ein Axiomensystem für die Geometrie der Punkte und Kreise aufgestellt, das ausreicht, um insbesondere die Verknüpfungssätze und den Satz des Pappus zu beweisen, so daß sich nach Hilbert die Punkte der Kreisgeometrie, die in der bekannten Weise durch die Punkte und die zu einem festen Punkt gehörigen Berührungskreisbüschel der gewöhnlichen Ebene definiert sind, abbilden lassen auf die Punkte einer ebenen projektiven Koordinatengeometrie über einen Körper. Nach Einführung eines Koordinatendreiecks werden die Hauptkreise der Geometrie durch quadratische Gleichungen dargestellt mit festem, von  $x_3$  freiem quadratischen Bestandteil ohne reelle Nullstellen. Der 2. Teil gibt eine axiomatische Begründung der Geometrie der Speere und Zyklen (orientierte Geraden und orientierte Kreise der euklidischen Ebene), wobei die Axiome und ihre Folgerungen möglichst dual zum 1. Teil formuliert sind. Der Aufbau benutzt beidemal wesentlich einen axiomatisch eingeführten „Schnittpunktsatz“, das ist eine Inzidenzaussage zwischen Punkten und Kreisen bzw. eine Berührungsaussage über Speere und Zyklen. — In beiden Teilen werden die Axiome auf ihre Abhängigkeit untersucht.

*R. Moufang.*

**Brach, Willi: Zur Liebmannschen Konstruktion der Geraden-Kugel-Transformation.** Jber. Deutsch. Math.-Verein. 44, 293—295 (1934).

Man kann die Punkte und Geraden der komplexen Ebene auf die reellen Punkte und charakteristischen Ebenen des  $R_4$  bekanntlich dadurch abbilden, daß man einen Punkt  $\alpha$  der Ebene und den konjugiert-komplexen von zwei konjugiert-komplexen Geraden  $\mathfrak{G}$  und  $\bar{\mathfrak{G}}$  des  $R_4$  aus projiziert und die Verbindungsebenen zum Schnitt

bringt, ebenso eine Gerade der Ebene und die konjugiert-komplexe von  $\mathfrak{G}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$  aus projiziert und die Verbindungs- $R_3$  zum Schnitt bringt. Aus zwei im  $R_4$  geeignet angenommenen Bildräumen  $R_3^I$  und  $R_3^{II}$  schneiden die beiden Ebenenbündel durch  $\mathfrak{G}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$  zwei Geradenbündel, die  $R_3$ -Bündel durch  $\mathfrak{G}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$  zwei Ebenenbündel aus. Durch eine Korrelation der Ebene wird jedes der beiden Geradenbündel im  $R_3^I$  auf eines der beiden Ebenenbündel im  $R_3^{II}$  projektiv so bezogen, daß der gemeinsamen Geraden der beiden Geradenbündel ein und dieselbe Ebene der beiden Ebenenbündel zugeordnet wird. Der so definierte Zusammenhang zwischen  $R_3^I$  und  $R_3^{II}$  ist nach H. Liebmann (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1915) eine Geraden-Kugeltransformation. Diese Liebmannsche Konstruktion der Geraden-Kugeltransformation wird also hier mit S. Lies erster Begründung der Geraden-Kugeltransformation in Zusammenhang gebracht, die die Verwandtschaft ja als Bild einer komplexen Korrelation gewinnt. (Vgl. E. A. Weiss, dies. Zbl. 7, 73.) E. A. Weiss (Bonn).

**Strubecker, Karl:** Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimalebene.) Vorl. Mitt. Anz. Akad. Wiss., Wien 1934, 315—318.

S. Lie hat zwei Abbildungen von Linienelementen  $(x, y, z = dy:dx)$  der Ebene auf Punkte des Raumes verwandt:

$$x_0:x_1:x_2:x_3 = 1:x:y:z \quad \text{und} \quad \xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 = 1:x:2y - xz:z.$$

Um zu einer gruppentheoretischen Begründung dieser Abbildung zu kommen, denkt sich der Verf. das Linienelement als Soma einer Minimalebene, d. h. als Repräsentant einer Transformation der in dieser Ebene erklärten „Grenzgruppe  $G_3$ “ (Untergruppe der Bewegungen). Für diese Gruppe werden Parameterdarstellungen mit Hilfe von zwei verschiedenen Systemen von höheren komplexen Zahlen angegeben. Die Parameter dienen als Somenkoordinaten. Deutet man sie als homogene Koordinaten im Raume, so erhält man die beiden Lieschen Abbildungen. Dabei überträgt sich der natürliche Äquivalenzbegriff der Kinematik der Minimalebene auf den Begriff der Kongruenz hinsichtlich der Grenzgruppe  $G_5$  eines isotropen  $R_3$  (dessen absoluter Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfallen ist). Das gewonnene Somenkontinuum kann man auf zweierlei Weise abschließen, konform und projektiv. Bei der zweiten Möglichkeit ergibt sich der Bildraum als erzeugender  $R_3$  der Studyschen  $M_6^2$  des  $R_7$ .

E. A. Weiss (Bonn).

**Géhéniau, J., et L. Dufour:** Sur les fonctions linéaires vectorielles dans un système quelconque de coordonnées. Mathesis 48, 427—433 (1934).

**Basch, Alfred:** Zur Geometrie der Skalar- und Vektorfelder, insbesondere des Laplaceschen Feldes. Mh. Math. Phys. 41, 300—321 (1934).

1. Durch ein Skalarfeld  $v = v(\mathbf{r})$  sind die Schar seiner Niveaulächen  $v(\mathbf{r}) = \text{const}$  und deren orthogonale Trajektorien, die Feldlinien des zugehörigen Gradientenfeldes  $\mathbf{g} = \nabla v$  bestimmt. Ein solches Gradientenfeld ist seiner Natur nach wirbelfrei,  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ ; ist es auch quellenfrei,  $\nabla \mathbf{g} = \nabla^2 v = 0$ , so heißt es ein Laplacesches Feld. Die Schar der Niveaulächen eines Feldes kann auch zu einem Laplaceschen Feld gehören, obwohl  $\nabla^2 v \neq 0$  ist, wenn durch eine andere Skalierung  $V = V(v)$  der Niveaulächen die Bedingung  $\nabla^2 V = 0$  erreicht werden kann. Dies tritt dann ein, wenn  $v$  der Differentialgleichung  $(\nabla[\nabla^2 v/(\nabla v)^2]) \times \nabla v = 0$  genügt. — 2. Ein Beispiel liefert die Schar der konfokalen elliptischen Zylinder. — 3. Untersuchung durch skalierungs-invariante Größen. — 4. Die Drehwaage von Eötvös als Beispiel. — 5. Geometrische Deutung der Differentialgleichung aus 1. — 6. In einem ebenen Laplaceschen Feld (Schnitt eines parallelebenen Feldes mit einer zu den Erzeugenden senkrechten Ebene) ist der Gradient des Logarithmus des Betrages des Feldvektors durch den Vektor gegeben, der vom Feldpunkt nach dem Pol der Cesàroschen Geraden in bezug auf den Einheitskreis um den Feldpunkt führt. Die Cesàrosche Gerade ist die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Niveau- und der Feldlinie (die übrigens in



dieser Aussage vertauscht werden dürfen). — 7. Zwei Kurven einer Ebene kreuzen einander in einem gemeinsamen Punkt monoton, alternierend oder indefinit (Namen von A. E. Mayer), je nachdem die stärker gekrümmten Teile einander die konkave Seite zuwenden, die konvexe Seite zuwenden oder einander verschiedenartig gekrümmte Seiten zuwenden (Scheitelpunkte sind dabei auszuschließen). Zur Beschreibung dieser drei Typen können die zweiten Krümmungsmittelpunkte (Krümmungsmittelpunkte der Evoluten) herangezogen werden. — 8. In einem ebenen Laplaceschen Feld ist nur der erste oder der zweite Fall möglich. — 9. Beispiele solcher Fälle.

L. Schrutka (Wien).

Scherrer, W.: **Quaternionen und Semivektoren.** Comment. math. helv. 7, 141 bis 149 (1934).

Die der Einstein-Mayerschen Theorie der Semivektoren (vgl. dies. Zbl. 6, 229) zugrunde liegende Tatsache, daß jede reelle Lorentztransformation sich aus zwei konjugiert-komplexen speziellen Lorentztransformationen  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{B}$  zusammensetzen läßt, derart, daß jedes  $\mathfrak{A}$  mit jedem  $\mathfrak{B}$  vertauschbar ist, kann auch aus der bekannten Darstellung der vierdimensionalen orthogonalen Transformationen mittels Quaternionen hergeleitet werden. Alles das ist im Grunde längst bekannt [vgl. etwa F. Klein, Math. Ann. 37, 546 (1890)].

van der Waerden (Leipzig).

Mayer, Anton E.: **Eine Überkonvexität.** Math. Z. 39, 511—531 (1935).

In der Ebene sei eine konvexe Kurve ohne Ecken und geradlinige Stücke, die den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, als Eichkurve einer Minkowskischen Maßbestimmung gewählt. Jede aus dieser durch Parallelverschiebung hervorgehende Kurve wird Einheitskurve genannt. Die Einheitskurven entsprechen den Kreisen vom Radius 1 in der euklidischen Geometrie. Diejenigen Teilbögen einer Einheitskurve, die von wenigstens einem Durchmesser der Einheitskurve nicht zerlegt werden, entsprechen den Kreisbögen vom Radius 1, die einen Halbkreis nicht übertreffen, und werden Einheitsbögen genannt. Eine Punktmenge wird nun als überkonvex bezeichnet, wenn je zwei ihrer Punkte durch einen Einheitsbogen verbunden werden können und wenn jeder solche Einheitsbogen selbst zur Menge gehört. Eine überkonvexe Menge ist insbesondere konvex. Beispiele überkonvexer Mengen sind die Bereiche konstanter Breite. Durch jeden Randpunkt einer überkonvexen Menge läßt sich eine Einheitskurve legen, die die Menge enthält. Besitzt umgekehrt eine abgeschlossene Menge mit inneren Punkten oder eine offene Menge diese „Stützeigenschaft“, so ist sie überkonvex. Ferner werden Sätze bewiesen, die gestatten, aus Überkonvexität oder der Stützeigenschaft im Kleinen auf Überkonvexität im Großen zu schließen, und die Sätzen von Tietze über gewöhnliche Konvexität vollkommen analog sind (Literaturangaben z. B. in Erg. Math. 3, H. 1, 3—4, 7). Unter den abgeschlossenen konvexen Mengen sind die überkonvexen dadurch gekennzeichnet, daß die untere Grenze der Krümmung ihrer Randkurven  $\geq 1$  ist; hierbei wird diese untere Grenze ohne Differentiierbarkeitsvoraussetzungen im Sinne der Minkowskischen Geometrie definiert. Im euklidischen Fall ist dies der bekannte Satz, daß eine konvexe Kurve dann und nur dann ungehindert im Einheitskreis rollen kann, wenn die untere Grenze ihrer Krümmung  $\geq 1$  ist. Schließlich überträgt der Verf. die obigen Begriffsbildungen auf den  $n$ -dimensionalen Raum und zeigt von einem Teil der Sätze, daß sie sinngemäß abgeändert auch allgemein gelten. Bei einigen Sätzen, namentlich bei den Analoga der Tietzeschen Sätze, gelingt die Verallgemeinerung im euklidischen Fall, während bei Minkowskischer Maßbestimmung die Frage nach der Übertragbarkeit offen gelassen wird.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Segre, Beniamino: **Intorno alle ovali inscritte in un poligono regolare.** Boll. Un. Mat. Ital. 13, 275—279 (1934).

Es wird folgender Satz bewiesen: Ist einem regulären  $n$ -Eck eine geschlossene konvexe Kurve eingeschrieben (so daß also jede Seite des  $n$ -Ecks von der Kurve berührt wird), so liegt das Verhältnis der Umfänge von Kurve und Polygon zwischen

$\cos \frac{\pi}{n}$  und 1. Dies läßt sich unmittelbar auf die hier in sehr einfacher Weise gelöste elementargeometrische Aufgabe zurückführen, das Minimum der Längen der einem gegebenen regulären  $n$ -Eck eingeschriebenen  $n$ -Ecke zu bestimmen. Es zeigt sich, daß das Minimum für das reguläre eingeschriebene  $n$ -Eck erreicht wird, und zwar bei ungeradem  $n$  nur für dieses, bei geradem  $n$  außerdem für unendlich viele andere Polygone. — Einleitend wird mit der bekannten Stetigkeitsbetrachtung gezeigt, daß jeder konvexen Kurve ein Quadrat umschrieben werden kann. *W. Fenchel.*

**Segre, Beniamino:** *Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante, che contengono nell'interno una linea assegnata.* Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 279—283 (1934).

Ref. hat [Math. Ann. **101**, 238 (1929)] in etwas anderer Formulierung folgendes gezeigt: Ist die Länge einer geschlossenen rektifizierbaren Kurve auf der Kugelfläche kleiner als die Länge eines Großkreises, so liegt die Kurve innerhalb einer passenden Halbkugel. Hieraus ergab sich, daß die Gesamtkrümmung  $\int \kappa ds$  ( $\kappa$  = Krümmung,  $s$  = Bogenlänge) einer beliebigen geschlossenen Raumkurve größer oder gleich  $2\pi$  ist. Verf. verallgemeinert und verschärft den obigen Satz zu folgendem: Eine geschlossene rektifizierbare Kurve der Länge  $a$  auf einer Fläche konstanter Krümmung liegt innerhalb eines passenden geodätischen Kreises vom geodätischen Radius  $\frac{a}{4}$ . Im Falle positiver Flächenkrümmung ist  $a$  in geeigneter Weise zu beschränken. Der Beweis ist sehr elementar und kurz. [Ein ganz ähnlicher Beweis für den spezielleren Satz ist, wie Ref. bemerkt, schon von Liebmann (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1929**, 392) angegeben worden.] Verf. weist noch darauf hin, daß sich die Sätze, einschließlich der Anwendung auf die Gesamtkrümmung der Raumkurven, auf Kurven in Räumen beliebiger Dimension übertragen lassen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Sauter, Ilse:** *Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens  $n$ -ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven  $R_n$ .* S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen **65**, 189—190 (1934).

Es wird der Beweis des folgenden Satzes skizziert: Ist  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r, \dots$  eine von hinten (bzw. von vorn) gegen den Punkt  $Q$  konvergierende Folge von Punkten eines Bogens  $\mathfrak{B}$   $n$ -ter Ordnung im projektiven  $R_n$ , so konvergiert die Folge der vorderen und der hinteren  $k$ -dimensionalen Tangentialschmieghalbräume, welche in  $Q$  an  $\mathfrak{B}$  existieren, gegen den hinteren (bzw. gegen den vorderen)  $k$ -dimensionalen Tangentialschmieghalraum in  $Q$  an  $\mathfrak{B}$ , und zwar für  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Fallen also für jeden Punkt  $P$  von  $\mathfrak{B}$  und für  $r = 1, 2, \dots, k$  der vordere und hintere  $r$ -dimensionale Tangentialschmieghalraum zusammen, dann ändern sich die  $k$ -dimensionalen Tangentialschmieghalbräume stetig mit  $P$ . Eine ausführliche Darstellung des Beweises wird an anderer Stelle erscheinen. *Sz. Nagy* (Szeged).

### **Differentialgeometrie:**

**Bouvaist, R.:** *Construction de la normale et du centre de courbure en un point de courbes dont le bicorne est un cas particulier.* Mathesis **48**, 415—417 (1934).

**Sintsov, D. M.:** *Discussion du cas douteux des singularités doubles de la courbe plane en coordonnées tangentielles.* Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 37—43 (1934).

L'a. étudie — au point de vue de la réalité — les tangentes doubles des courbes planes, sans toutefois tenir compte de la théorie moderne des singularités [sur ce sujet cfr. p. ex. F. Enriques-O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologna: Zanichelli 1918), t. II, livre 4]. *B. Segre.*

**Inzinger, Rudolf:** *Über die Zwischenevolutoiden und Zwischenevolventoiden ebener Kurven.* Jber. Deutsch. Math.-Verein. **44**, 296—306 (1934).

Alle Geraden  $t_\alpha$ , die in den Punkten  $P$  einer ebenen Kurve  $k$  diese unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, umhüllen die sog.  $\alpha$ -Evolutoide mit den Punkten  $P_{1\alpha}$  als Be-



rührungspunkte der  $t_\alpha$ . Sucht man zu  $P$  und  $P_{1\alpha}$  auf  $t_\alpha$  einen neuen Punkt  $P_{1\alpha}^1$ , so daß dieses Tripel immer ein bestimmtes Teilverhältnis  $\lambda$  hat, so wird der Ort der  $P_{1\alpha}^1$  als  $(\lambda, \alpha)$ -Zwischenevolutoide von  $k$  bezeichnet. Für diese so definierten Kurven, die auch kinematische Bedeutung haben, ergeben sich eine Reihe von Sätzen, die analytisch hergeleitet werden.

Eckhart (Wien).

**Barrillon, E.-G.:** Rayons de courbure d'ordre supérieur des courbes attachées à une fonction analytique. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1280—1282 (1934).

In der Potenzreihenentwicklung  $w = z + az^2 + bz^3 + \dots$ , die bis auf eine Drehstreckung, also ohne Gestaltänderung, für jedes Funktionselement gilt, werden die Koeffizienten  $a, b$  folgendermaßen auf anschauliche Größen zurückgeführt: Für  $w = u + iv$  sei  $r_u$  der Krümmungsradius der Kurve  $u = 0$  im Punkt  $z = 0$ , und  $r'_u$  die Ableitung von  $r_u$  nach der Bogenlänge jener Kurve in jenem Punkt. Entsprechend  $r_v$  und  $r'_v$ . Seien  $m, n$  die durch  $z = 0$  gehenden  $45^\circ$ - bzw.  $135^\circ$ -Isoklinen der Schar  $u = \text{konst.}$   $p, q$  die Krümmungsradien jener Kurven in  $z = 0$ . Endlich  $p'$  die Ableitung von  $p$  nach der Bogenlänge von  $m$  in jenem Punkt. Dann wird angegeben:

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_u} - \frac{i}{r_v} \right), \quad b = \frac{1}{6} \frac{p'}{p^3} - \frac{1}{2pq} + i \left( \frac{1}{6} \frac{r'_u}{r_u^3} - \frac{1}{2r_u r_v} \right).$$

Ferner gilt die Identität:  $\frac{r'_u}{r_u^3} + \frac{r'_v}{r_v^3} = 0$ . Bezeichnet  $r_x$  den Krümmungsradius der durch  $z = 0$  gehenden zum Winkel  $x$  gehörigen Isogonaltrajektorie der Schar  $u = \text{konst.}$ , so gilt:  $\frac{1}{r_x} = \frac{\cos x}{r_u} + \frac{\sin x}{r_v}$ . Ist  $r'_x$  die Ableitung von  $r_x$  nach der Bogenlänge der bezüglichen Kurve, so gilt weiter:  $\frac{r'_x}{r_x^3} = \frac{r'_u}{r_u^3} \cos 2\alpha + \frac{p'}{p^3} \sin 2\alpha$ . Es wird angegeben, daß eine entsprechende Relation die Krümmungen und deren Ableitungen bis zur  $n$ -ten Ordnung für jedes ungerade  $n$  miteinander verbindet. Cohn-Vossen (Leningrad).

**Mentré, Paul:** Étude géométrique des caractéristiques. Bull. Soc. Math. France 62, 265—273 (1934).

Es werden systematisch Begriffe entwickelt, die sich dem geometrischen Begriffe der Charakteristik anschließen. Sei  $\mathfrak{A}$  ein von einem Parameter kontinuierlich abhängendes System von Mannigfaltigkeiten (z. B. Flächen), jede als Ort von Elementen derselben Art (z. B. Punkten) gedacht. Ist  $A$  eine Mannigfaltigkeit aus  $\mathfrak{A}$  und ist der Durchschnitt von  $A$  mit der unendlich benachbarten Mannigfaltigkeit des Systems nicht leer, so bildet er die Charakteristik von  $A$ . Besitzt jede Mannigfaltigkeit aus  $\mathfrak{A}$  eine Charakteristik, so bildet das System aller Charakteristiken die Charakteristik von  $\mathfrak{A}$ . Rekurrent werden Charakteristiken zweiter und höherer Ordnung von  $A$  bzw.  $\mathfrak{A}$  definiert. Die allen Mannigfaltigkeiten von  $\mathfrak{A}$  gemeinsamen Elemente bilden die „letzte Charakteristik“ von  $\mathfrak{A}$ . Gibt es keine solchen Elemente, so existiert unter Umständen eine Charakteristik höchster Ordnung von  $\mathfrak{A}$  („letzte Charakteristik“). Dem Begriffe der Charakteristik schließen sich in leicht verständlicher Weise die Begriffe der Umhüllenden und der Berührung von Mannigfaltigkeiten an. — Alle diese Begriffe werden an einfachen, zumeist der Liniengeometrie entnommenen Beispielen erläutert und zur Aufstellung ohne Rechnung geometrischer, oft interessanter Sätze angewendet.

O. Borůvka (Brno).

**Calugaréano, Georges:** Sur la représentation intrinsèque des surfaces. Mathematica, Cluj 10, 92—98 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 9, 226.

**Tsuboko, Matsuji:** Sur la courbure projective d'une courbe. Mem. Ryojun Coll. Engrg. Inouye Commemorat. Vol. 59—74 (1934).

Avec des calculs relativement simples, l'a. parvient à la notion de courbure projective dans un point  $P$  générique d'une courbe  $C$  plane ou gauche. La déduction est faite en introduisant des repères opportuns: elle repose sur la considération de la conique osculatrice en  $P$ , dans le cas où  $C$  est plane; ou bien — dans le cas où  $C$  est gauche — de la courbe d'intersection de la surface développable engendrée par les

tangentes de  $C$  avec le plan osculateur en  $P$ , et de la projection de  $C$  sur ce plan d'un centre convenable. — Le travail se rattache à un précédent Mémoire de J. Kanitani (Mem. Ryojun Coll. Engrg 6, 91; ce Zbl. 7, 364), mais il ne contient aucune autre référence ou comparaison avec les développements antérieurs du sujet (cfr. p. ex. G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale. T. I, chap. I. Bologna: Zanichelli 1926; ou G. Fubini-E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Chap. II et III. Paris: Gauthier-Villars 1931). *B. Segre.*

**Kimpara, Makoto:** Sur l'enveloppe des quadriques de Moutard. Mem. Ryojun Coll. Engrg, Inouye Commemorat. Vol. 33—39 (1934).

Anschließend an die Arbeit von Kanitani (Géométrie différentielle projective des hypersurfaces. Mem. Ryojun Coll. Engrg. 1931; dies. Zbl. 5, 261) untersucht der Verf. mittels der Kanitanischen Methode die Einhüllende der Moutardschen Quadriken, die den Tangenten einer Kurve  $C$  auf einer Fläche (die keine Regelfläche ist) angehören. Es zeigt sich, daß die Charakteristiken dieser Schar aus zwei Kegelschnittfamilien bestehen. Dann und nur dann, wenn  $C$  eine Darboux'sche Kurve ist, zerfällt eine dieser Familien in die asymptotischen Tangenten. Es wird auch der Fall untersucht, wo die Einhüllende aus zwei Regelflächen besteht, deren Erzeugende die asymptotischen Tangenten sind. *Hlavatý (Praha).*

**Delgleize, A.:** Sur les surfaces de Guichard de première espèce. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 164—169 u. 201—205 (1934).

Deux surfaces  $S, S'$  ayant même représentation sphérique de lignes de courbure sont des surfaces de Guichard conjuguées si leurs rayons de courbure principaux  $r_1, r_2, r'_1, r'_2$  satisfont à la relation:  $r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.}$  Chacune est caractérisée par l'équation:  $(r_1 - r_2)^2 = \frac{r_1^2}{e} + \varepsilon \frac{r_2^2}{g}$  où  $e, g$  sont les coefficients de l'élément linéaire sphérique et  $\varepsilon = \pm 1$ . Si  $\varepsilon = +1$ ,  $S$  est de première espèce. Cela posé, l'auteur examine des surfaces  $N$  auxquelles on peut associer une surface  $S$  parallèle. Si  $N$  est 1° une surface minima ou lui parallèle ou 2° une surface à courbure constante positive ou une surface parallèle, il existe une surface  $S$  qui répond aux conditions posées. S'il en existe deux et toutes les deux sont de première espèce, ce sont des surfaces de Guichard conjuguées et la surface  $N$  appartient à la classe 2°. Si elles sont d'espèces différentes, ce sont des surfaces introduites par Eisenhart et  $N$  est de la classe 1°. *S. Finikoff (Moscou).*

**Vincensini, P.:** Sur les congruences stratifiables. J. Math. pures appl., IX. s. 13, 419—449 (1934).

Soient  $K$  et  $K'$  deux congruences de droites.  $K'$  est simplement stratifiable avec  $K$  s'il existe  $\infty^1$  surfaces  $\Sigma$  dont les plans tangents aux points où elles rencontrent un rayon de  $K$  passent par le rayon homologue de  $K'$ . Cela posé, l'auteur cherche 1° des congruences  $K'$  qui sont liées avec le même  $K$  et dont les rayons homologues sont coplanaires, 2° dont les rayons sont de plus concourants. Quel que soit un couple simplement stratifiable  $(K, K')$ , il existe  $\infty$  congruences  $\theta$  qui répondent à deux conditions posées. Si le couple primitif est conjugué, les  $\infty^2$  congruences  $\theta$  dont les rayons homologues passent par le même point  $\omega$  du rayon de  $K'$ , sont conjuguées à la surface  $(\omega)$ . Si le couple  $(K, K')$  est doublement stratifiable et conjugué, il en est le même pour tous les couples  $(K, \theta)$ ; les surfaces  $(\omega)$  sont celles qui stratifient le couple  $(K, K')$ . Applications aux transformations des surfaces  $R$ , des couples stratifiables et des quadruples doublement stratifiables. *S. Finikoff (Moscou).*

**Rozet, O.:** Sur les congruences de droites appartenant à un complexe linéaire. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 902—909 (1934).

L'a. a récemment donné les conditions analytiques afin qu'une congruence  $K$ , non  $W$ , de droites de l'espace ordinaire, se représente sur la quadrique de Klein avec une surface, de façon que les courbes images de ses développables constituent une grille sur cette surface [v. O. Rozet, Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 698 (1934);



ce Zbl. 9, 376 (1934)]. — Maintenant il reconnaît que les dites conditions, dans le cas où  $K$  soit  $W$ , impliquent que la congruence  $K$  appartient à un complexe linéaire; et il ajoute quelques résultats sur les congruences de droites qui jouissent de cette propriété.

Beniamino Segre (Bologna).

**Schapiro, H.:** Über die Transplantation der Parallelübertragung und der Kurvensysteme. *Mh. Math. Phys.* 41, 239—262 (1934).

Diese Arbeit behandelt Fragen der „relativen Flächentheorie“, wie sie von E. Müller (*Mh. Math. Phys.* 1921) und anderen entwickelt wurde. Zwei Flächen  $S$  und  $S_0$  in einem dreidimensionalen euklidisch-affinen Raum  $E_3$  werden derart aufeinander bezogen, daß in entsprechenden Punkten die Tangentialebenen parallel sind. Entsprechen gleichen Werten der Parameter  $u^1, u^2$  beider Flächen solche parallele Tangentialebenen, so wird die Beziehung ausgedrückt durch einen Tensor  $p^j_i$  in den  $u^i$ . Mit Hilfe dieses Tensors lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung ausdrücken, insbesondere die auf  $S_0$  „transplantierten“ und die „umgesetzten“ Kurven einer gegebenen Kurvenschar auf  $S$ . Dabei werden die transplantierten Kurven durch parallele Übertragung des Richtungsfeldes der Kurvenschar auf  $S$  erhalten, während die umgesetzten Kurven erhalten werden, indem einem Punkte von  $S$  ein Punkt von  $S_0$  entspricht. Jetzt kann auch die „Transplantation“ einer auf  $S$  gegebenen linearen Parallelübertragung definiert und untersucht werden. Insbesondere ergibt sich, daß, wenn eine solche Übertragung mit Hilfe eines Pseudonormalvektors festgelegt wird, die transplantierte Übertragung durch denselben Pseudonormalvektor bestimmt ist. Auch untersucht der Verf. die Transplantation geodätischer Linien und die Beziehungen zwischen transplantierten und konjugierten Richtungen.

Struik (Haarlem).

● **Agostinelli, Cataldo:** Parallelismo in un sistema di  $S_k$  euclidei tangenti a una varietà. Torino: F. Gilli 1933. 31 S.

**Kraus, Auguste:** Hyperflächenstreifen im Riemannschen Raume. *Mh. Math. Phys.* 41, 424—438 (1934).

In einer  $V_n$  sei längs einer Kurve  $C$  mit dem tangentialen Einheitsvektor  $i$  ein Einheitsvektorfeld  $j \perp i$  gegeben. Wenn die Vektoren

$$i, j, i^{(1)}, j^{(1)}, \dots, i^{(r-1)}, j^{(r-1)} \mid j^{(r)}, j^{(r+1)}, \dots, j^{(r+s-1)} \quad (1)$$

linear unabhängig sind,  $i^{(r)}$  eine Linearkombination von (1) bis zum Strich,  $j^{(r+s)}$  eine Linearkombination von (1) ist, oder wenn die Vektoren

$$i, j, \dots, i^{(r-1)}, j^{(r-1)}, i^{(r)} \mid i^{(r+1)}, i^{(r+2)}, \dots, i^{(r+s)} \quad (2)$$

linear unabhängig sind, und  $j^{(r)}$  eine Linearkombination von (2) bis zum Strich,  $i^{(r+s+1)}$  eine Linearkombination von (2) ist, so heißt der Bivektor  $i^{[r]}j^{[s]}$  ein Hyperflächenstreifen längs  $C$ . ( $s = 0, 1, \dots, r = 1, 2, \dots$  und die eingeklammerten Akzente deuten die absolute Ableitung an.) Die oben angegebenen Vektoren werden nach dem Schmidtschen Verfahren „orthogonalisiert“, und für ein solches normalisiertes  $m$ -Bein ( $m = 2r + s$  oder  $= 2r + s + 1$ ) werden die „Frenetschen“ Formeln abgeleitet. Die damit verbundenen skalaren Krümmungen des Hyperflächenstreifens bilden ein vollständiges Invariantensystem. Wenn insbesondere  $s = 0$  und  $V_n = R_n$ , so liegt der Hyperflächenstreifen in einem  $R_m$  (aber nicht in einem  $R_{m-1}$ ). *Hlavatý.*

**Weise, K. H.:** Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen. *Math. Ann.* 110, 522—570 (1934).

Die Klasse  $k$  eines  $n$ -dimensionalen Riemannschen Raumstücks  $R_n$  ist die kleinste Zahl  $k$  der Eigenschaft, daß  $R_n$  in einen  $(n + k)$ -dimensionalen euklidischen Raum eingebettet werden kann. Für beliebige  $R_n$  ist  $k \leq \binom{n}{2}$  bekannt. Verf. erledigt vollständig die Frage nach Aufstellung aller  $R_n$ , für die  $k = 1$ . Es ergeben sich als Kriterien: ein algebraisches Ungleichungssystem, ein algebraisches Gleichungssystem und ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die Komponenten des Krümmungs-

tensors von  $R_n$ . Hierauf werden die  $R_n$  mit  $k \leq 2$  untersucht. Es ergeben sich algebraische Schwierigkeiten, die eine allgemeine Erledigung vorläufig verhindern. Dagegen erfaßt das vom Verf. entwickelte Verfahren alle  $R_n$  des Linienelementes

$$ds^2 = \frac{1}{F^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 \text{ mit } F = \sum_{i=1}^n f_i(x_i); \text{ also insbesondere die } R_n \text{ konstanter Krümmung } K.$$

In diesem letzten Fall ist für  $K > 0$  trivialerweise  $k = 1$  (Hyperkugeln). Für  $K < 0$  erhält Verf. die bemerkenswerten Ergebnisse:  $k = 2$  für  $n = 3$ ,  $k = 3$  für  $n = 4$ ,  $3 \leq k \leq n - 1$  für  $n \geq 5$ . Definiert man  $k$  allgemeiner bezüglich Einbettung in einen Raum konstanter, nicht notwendig verschwindender Krümmung  $K_0$ , so beweist Verf.:

a) Für  $K > K_0$  ist  $k = 1$ . b) Für  $K < K_0$  gelten allgemein die oben für  $K_0 = 0$  angegebenen Ergebnisse.

*Cohn-Vossen* (Leningrad).

## **Topologie:**

**Günzburg, A. M.: Aufgabe der vier Farben.** Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 73—89 (1934).

Es soll das Vierfarbentheorem allgemein bewiesen werden. Das Beweisverfahren beruht auf dem Hilfssatz (S. 81): „Gegeben ist die Färbung an der einen Seite eines Bezirkes der Karte. Zu beweisen ist, daß die angrenzenden Gebiete eines anderen Bezirkes, jenseits der Grenze ebenfalls mit den gleichen vier Farbtönen gefärbt werden können.“ Dieser Hilfssatz ist offensichtlich unrichtig; denn an der Grenze kann ein Gebiet liegen, das zu vier mit verschiedenen Farben gefärbten Gebieten benachbart ist.

*Friedrich Levi* (Leipzig).

**Franklin, Philip: A six color problem.** J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 363—369 (1934).

Problem der Kartenfärbung auf ein- und zweiseitigen Ringflächen. Die Formel von Heawood [Quart. J. Math. 24, 332 (1890)] liefert 7 als obere Schranke für die Farbenzahl. Der Torus läßt sich bekanntlich in sieben Nachbargebiete zerlegen; die Farbenzahl des einseitigen Ringes galt wohl noch [vgl. H. Tietze, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 19, 155—159 (1910)] als unbekannt. Es wird gezeigt, daß jede siebenfarbige Zerlegung einer Ringfläche sich auf eine Zerlegung in sieben Nachbargebiete zurückführen läßt und daß andererseits jede aus sieben paarweise benachbarten Sechsecken aufgebaute Fläche ein Torus ist. Die Farbenzahl der einseitigen Ringfläche ist also = 6.

*Friedrich Levi* (Leipzig).

**Coxeter, H. S. M.: Wythoff's construction for uniform polytopes. (Prelim. note.)** Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 327—339 (1934).

Das Ziel der Arbeit ist, die Methode von Wythoff [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 20, 966—970 (1918)] soweit auszubauen, um damit alle bekannten und einige neue gleichförmige Polytope herzuleiten. Ob sich damit alle endlichen Polytope ergeben, ist noch fraglich. Ist der Fundamentalbereich ein Simplex, so unterteilt man ihn mittels Hyberebenen durch Kante—gegenüberliegende Kantenmitte. Dies wird an den zugehörigen Graphen für den euklidischen und den sphärischen Fall durchgeführt.

*Burckhardt* (Zürich).

**Whitehead, J. H. C.: Certain theorems about three-dimensional manifolds. I.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 308—320 (1934).

Das Theorem I der Arbeit kann durch Gegenbeispiele widerlegt werden, worauf bereits im Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 90 (1932); dies. Zbl. 6, 35 hingewiesen wurde. Damit fallen auch die Folgerungen aus diesem Theorem, insbesondere der Beweis der Poincaréschen Vermutung.

*H. Seifert* (Dresden).

**Rothberger, Fritz: Eine Homöomorphiebedingung für orientierbare Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.** Mh. Math. Phys. 41, 353—357 (1934).

$c_1, \dots, c_p$  und  $d_1, \dots, d_p$  seien die geschlossenen Kurven eines Heegaard-diagramms vom Geschlecht  $p$ , die im einen bzw. anderen Vollring topologische Kreis-



bilder begrenzen.  $c_i$  hat mit  $d_k$  endlichviele Schnittpunkte  $A'_{ik}$  gemein. Es wird der Satz bewiesen, daß die zugehörige dreidimensionale Mannigfaltigkeit vollkommen bestimmt ist durch 1. das System der  $A'_{ik}$  mit ihren Schnittzahlen (Kroneckerindizes) und 2. die zyklische Ordnung, in der die  $A'_{ik}$  auf den  $c_i$  und den  $d_k$  liegen. Die Frage, wann zwei Mannigfaltigkeiten, für die diese Daten verschieden sind, dennoch homöomorph sind, bleibt offen. *H. Seifert* (Dresden).

**Jarník, Vojtěch:** Über die stetigen Abbildungen der Strecke. *Mh. Math. Phys.* **41**, 408—423 (1934).

Sei  $C^k$  das System aller stetigen Bilder  $p(t)$  der abgeschlossenen Strecke  $[0, 1]$  im kartesischen  $R^k$ . Durch die übliche Abstandsfestsetzung (Abstand von  $p(t)$  und  $q(t)$  gleich dem Maximum der Abstände der Punkte  $p(t)$  und  $q(t)$  für alle  $t$  aus  $[0, 1]$ ) wird  $C^k$  zu einem metrischen vollständigen Raum. Eine Menge  $M \subset C^k$  heißt eine Residualmenge, wenn  $C^k - M$  eine Menge erster Kategorie, d. h. Summe endlich oder abzählbar vieler in  $C^k$  nirgends dichter Mengen ist. Verf. beweist: Satz 1.  $C^k$  enthält eine Residualmenge, deren jedes  $p(t)$  folgende Eigenschaften besitzt: 1. für  $k = 1$ : ist  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , so ist  $\min_{\alpha \leq t \leq \beta} p(t) < \max_{\alpha \leq t \leq \beta} p(t)$ , und zu jedem dazwischenliegenden  $y$

gibt es unendlich viele Werte von  $t$  mit  $\alpha \leq t \leq \beta$  und  $p(t) = y$ ; für  $k = 2$ : sind  $t_1, t_2, t_3$  drei verschiedene Parameterwerte aus  $[0, 1]$ , so ist nicht  $p(t_1) = p(t_2) = p(t_3)$ , jedoch gibt es in jedem Teilintervall von  $[0, 1]$  zwei Werte  $t_1$  und  $t_2$  mit  $p(t_1) = p(t_2)$ ; für  $k > 2$ : aus  $t_1 < t_2$  folgt  $p(t_1) \neq p(t_2)$ . Satz 2.  $C^k$  enthält eine Residualmenge, deren  $p(t)$ , als Punktmengen betrachtet, Kurven (eindimensionale Kontinua) sind. Satz 3.  $C^k$  enthält eine Residualmenge, deren jedes  $p(t)$  folgende Eigenschaften besitzt: 1. für  $k \neq 2$  ist die Menge aller Punkte  $p(t)$  ein Bogen; für  $k = 2$  ist die Menge aller Punkte  $p(t)$  mit  $\alpha \leq t \leq \beta$  ( $\alpha, \beta$  beliebige Werte aus  $[0, 1]$ ) eine in jedem Punkte irreguläre Kurve (d. h. die Begrenzung jeder hinreichend kleinen Umgebung jedes ihrer Punkte hat mit der Kurve unendlich viele Punkte gemein). *Nöbeling* (Erlangen).

**Claytor, Schieffelin:** Topological immersion of peanian continua in a spherical surface. *Ann. of Math.*, II. s. **35**, 809—835 (1934).

Es sei  $\mathfrak{R}$  das System aller im kleinen zusammenhängenden Kontinua  $M$ , die kein topologisches Bild eines der beiden folgenden Komplexe  $C$  und  $D$  enthalten:  $C$  entsteht, wenn man zwei Gruppen von je 3 Punkten nimmt und jeden Punkt der ersten Gruppe mit jedem der zweiten durch eine Strecke verbindet;  $D$  entsteht, wenn man 5 Punkte nimmt und je zwei von ihnen durch eine Strecke verbindet. Eine einfach geschlossene Kurve  $T \subset M$  heißt eine Randkurve von  $M$ , wenn  $M - T$  keine 2 Komponenten  $E$  und  $E'$  enthält, so daß entweder die Begrenzungen  $F(E)$  und  $F(E')$  von  $E$  und  $E'$  in  $M$  (d. h.  $E \cdot M - E$  und  $E' \cdot M - E'$ ) identisch sind und aus genau drei Punkten bestehen oder ein Punktepaar von  $F(E)$  ein Punktepaar von  $F(E')$  in  $T$  trennt. Ein Bogen  $B \subset M$  heißt Randbogen von  $M$ , falls für jedes zyklische Element (maximale Teilmenge von  $M$ , in der je zwei Punkte auf einer einfach geschlossenen Kurve liegen), das mit  $B$  mindestens 2 Punkte gemein hat,  $B \cdot C$  in einer Randkurve von  $M$  liegt. Jeder in einem Randbogen liegende Punkt von  $M$  heißt ein Randpunkt von  $M$ . — Verf. beweist u. a.: Damit  $M \in \mathfrak{R}$  mit einer Teilmenge der Kugeloberfläche  $K$  homöomorph sei, ist notwendig und hinreichend, daß jeder Zerlegungspunkt (cutpoint)  $P$  von  $M$  Randpunkt der abgeschlossenen Hülle jeder Komponente von  $M - P$  sei; insbesondere ist jedes zyklische Kontinuum  $\in \mathfrak{R}$  in  $K$  einbettbar (vgl. Mazurkiewicz, *Fundam. Math.* **20**, 281—284, dies. Zbl. **6**, 426; Menger, *Erg. math. Kolloqu.* **2**, 30—31). Eine abgeschlossene 2-Zelle ist ein zyklisches Kontinuum  $\in \mathfrak{R}$  mit genau einer Randkurve und umgekehrt. *Nöbeling* (Erlangen).

**Eilenberg, Samuel:** Deux théorèmes sur l'homologie dans les espaces compacts. *Fundam. Math.* **24**, 151—155 (1935).

Sei  $E$  ein metrischer kompakter Raum; sei  $E^*$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $E$ ; sei  $\dim(E - E^*) \leq n$ . Es wird bewiesen: 1. Jeder  $n$ -dimensionale wahre Zyklus

[vgl. P. Alexandroff, Dimensionstheorie. Math. Ann. **106**, 161—238 (1932); dies. Zbl. **4**, 73] in  $E^*$ , der in  $E$  homolog Null ist, ist auch in  $E^*$  homolog Null. 2. Jeder  $(n+1)$ -dimensionale wahre Zyklus in  $E$  ist in  $E$  homolog einem wahren Zyklus in  $E^*$ .  
Čech (Brno).

Eilenberg, Samuel: Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence. Fundam. Math. **24**, 160—176 (1935).

Die wesentlichen Abbildungen der metrischen (insbesondere der kompakten) Räume in eine Kreislinie werden sehr einfach und durchsichtig untersucht. Es werden viele Anwendungen gegeben, von denen einige hier angedeutet werden mögen: 1. Sätze von Borsuk [Fundam. Math. **17**, 171—209 (1931); dies. Zbl. **3**, 27] über unikhärente Kontinua werden einfacher bewiesen. 2. Sei  $X \subset Y \subset \bar{X} \subset S_2$  (= Kugelfläche),  $X$  zusammenhängend,  $Y$  Schnitt von  $S_2$  zwischen den Punkten  $p$  und  $q$  (d. h. jedes  $p$  und  $q$  in  $S_2$  verbindende Kontinuum trifft  $Y$ ); dann enthält  $Y$  einen Punkt  $r$  so, daß  $X + (r)$  ein Schnitt von  $S_2$  zwischen  $p$  und  $q$  ist [Vermutung von Kuratowski, Fundam. Math. **12**, 216 (1928)]. 3. Der kompakte Raum  $X$  sei so beschaffen, daß jede stetige Abbildung von  $X$  in eine Kreislinie unwesentlich ist; sei  $Y$  ein stetiges Bild von  $X$  so, daß das Bild jeder in  $X$  offenen Menge in  $Y$  offen ist; dann ist jede stetige Abbildung von  $Y$  in eine Kreislinie unwesentlich.  
Čech (Brno).

Eilenberg, Samuel: Remarque sur un théorème de M. Hurewicz. Fundam. Math. **24**, 156—159 (1935).

Verf. beweist: Es existiere eine stetige Abbildung  $f$  des kompakten metrischen Raumes  $X$  in den metrischen Raum  $Y$  derart, daß die Urbildmenge  $f^{-1}(y)$  jedes Punktes  $y$  von  $Y$  höchstens nulldimensional ist und die Menge aller Punkte  $y$  von  $Y$  mit mehr als einem Urbildpunkt höchstens  $q$ -dimensional ist. Dann existiert eine topologische Abbildung  $h$  von  $X$  in das topologische Produkt  $Y \times R_{q+1}$  von  $Y$  mit dem  $(q+1)$ -dimensionalen kartesischen Raum  $R_{q+1}$ . Liegen die Abbildungen  $f$  dicht im Raum  $Y^X$  aller stetigen Abbildungen von  $X$  in  $Y$ , so liegen die Abbildungen  $h$  dicht im Raum aller stetigen Abbildungen von  $X$  in  $Y \times R_{q+1}$ . [Vgl. hierzu Hurewicz, S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1933**, 754—768; dies. Zbl. **8**, 133, und Flores, Erg. math. Kolloqu. **5**, 17 (1933); dies. Zbl. **7**, 368.]  
Nöbeling (Erlangen).

## Astronomie und Astrophysik.

Lyttleton, R. A.: The stellar case of the problem of three bodies, with application to the algol system. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 42—55 (1934).

Verf. wendet die Methode der Entwicklung der Störungen nach sin-Gliedern der Zeit, wie sie bei den großen Planeten schon lange üblich ist, auf dreifache Sterne, insbesondere das Algolsystem an. So ergibt sich schließlich eine Formel für den Eintritt der Minima von Algol unter Berücksichtigung der Störungen durch die dritte Komponente.  
G. Schrutka (Wien).

Smiley, C. H.: Note on Davidson's method of determining the true anomaly and perihelion-time in hyperbolic orbits. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 63—65 (1934).

Lorenz, H.: Kosmische und Atomkonstanten. Astron. Nachr. **253**, 361—364 (1934).

Colacevich, A.: Le doppie spettroscopiche nel diagramma di Russell sull'evoluzione stellare. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. **8**, 281—291 (1934).

Rossier, P.: Généralisation de la formule de Russel pour le calcul de l'index de couleur d'une étoile. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. **16**) **51**, 159—161 (1934).

Rossier, P.: Relation entre la longueur d'onde effective et l'index de couleur absolu d'une étoile. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. **16**) **51**, 161—162 (1934).



**Sotome, Kiyohusa:** The static pressure and density law of the stellar atmosphere. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **10**, 550—553 (1934).

This paper is written under the impression that the general equation of hydrostatic equilibrium,  $dP = -g \rho dr$ , is no longer true if the equipotential surfaces are not plane. The author considers the equilibrium of a spherically symmetric distribution of fluid by considering the forces acting on a section of an elementary cone of fluid with its vertex at the centre of symmetry. But he neglects the pressure on the curved surface of the cone, and so gets incorrect results. Had he taken this into account he would, of course, have obtained results agreeing with  $dP = -g \rho dr$ , which is not restricted in the way he asserts.

*W. H. McCrea (London).*

**Araki, Toshima:** Zur Theorie des inneren Aufbaues der weißen Zwerge. II. *Z. Astrophys.* **9**, 163—175 (1934).

The paper is a sequel to one previously published (see this *Zbl.* **9**, 415). The author studies a white dwarf model, consisting of an inner energy-generating core, and an outer shell with no energy generation. The rate of generation of energy is supposed to be proportional to  $(1 - \text{const } \rho^{1-2/3n})$ , where  $\rho$  is the density and  $n$  an arbitrary index. Relations are found between density, radius, temperature, and the ratio of gas pressure to total pressure on one hand, and the mass and the total radiation of the white dwarfs on the other. The special case  $n = 0$  is worked out numerically.

*Steenholt (Leipzig).*

**Lewis, Gilbert N.:** The genesis of the elements. *Physic. Rev.*, II. s. **46**, 897—901 (1934).

Die Hypothese wird vorgeschlagen, daß, ganz wie im Falle der metallischen Meteore, die Materie des Universums zum größten Teile aus Nickel und Eisen besteht. Diese Materie, die, außer bei extrem hohen Temperaturen, spontanen Transmutationen gegenüber thermodynamisch stabil ist, soll dann oberflächlich in solcher Weise von der kosmischen Strahlung beeinflusst werden, daß dadurch die Materie erzeugt wird, aus der Erdrinde und Steinmeteore aufgebaut sind. Zur Prüfung dieser Hypothese werden die relativen Häufigkeiten der wichtigsten in den beiden Meteorarten vorkommenden Atomsorten miteinander verglichen. Die Resultate scheinen die Annahme eines genetischen Zusammenhanges sehr plausibel zu machen. Drei wichtige Zertrümmerungsprozesse werden vorgeschlagen und diskutiert; erstens, die Abspaltung von  ${}^8\text{O}^{16}$  von den Kernen  ${}^{28}\text{Ni}^{60}$ ,  ${}^{28}\text{Ni}^{58}$ ,  ${}^{26}\text{Fe}^{56}$ ,  ${}^{26}\text{Fe}^{54}$ ; zweitens, das Zerfallen dieser Kerne in zwei neue untereinander gleiche Kerne, und drittens die Abspaltung von  ${}^4\text{He}$  von den Zertrümmerungsprodukten des letzterwähnten Prozesses. Die Konsequenzen dieser Annahmen werden entwickelt und bezüglich der relativen Häufigkeiten der Elemente in Meteoriten mit der Erfahrung verglichen; es scheint möglich zu sein, für mehrere Beobachtungstatsachen qualitativ Rechenschaft zu geben.

*Steenholt (Leipzig).*

**Adel, Arthur, and V. M. Slipher:** The constitution of the atmospheres of the giant planets. *Physic. Rev.*, II. s. **46**, 902—906 (1934).

The paper gives a discussion of the absorption spectra of the major planets: Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune. First, a description is given of the apparatus used for the duplication of these planetary spectra. Then the infrared spectrum of methane and its fundamental vibration frequencies are discussed. The rest of the paper deals with the application to the planetary problem. Approximately forty of the rotation-vibration bands are identified as due to absorption by the methane molecule, and are correlated in terms of the fundamental vibration frequencies. A very neat diagram is given illustrating these results. Methane appears to be the major constituent of the atmospheres of these distant bodies, the quantity in the absorbing strata increasing markedly from Saturn to Neptune. The last section of the paper deals with the possibility of the appearance of other hydrocarbons in the planetary atmospheres; the authors conclude that these hydro-carbons, if they are present at all in the atmo-

spheres of the giant planets, must exist only in traces relative to the amount of methane present. *Steensholt* (Leipzig).

**Wilson, O. C.:** The analysis of nova emission bands. *Astrophys. J.* **80**, 259—268 (1934).

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zum Problem der Deutung der breiten Emissionslinien in den Spektren der Novae. Der Diskussion wird die bekannte Annahme zugrunde gelegt, daß die breiten Emissionslinien von Atomen in radial expandierenden Nebelhüllen um die Novae emittiert werden. Chandrasekhar hat den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsverteilung in der Nebelhülle und Emissionsergiebigkeit einerseits und den Konturen der breiten Emissionsbanden andererseits untersucht (vgl. dies. Zbl. **9**, 136). Chandrasekhar ging hierbei deduktiv vor, indem er für Geschwindigkeitsverteilung und Ergiebigkeit mehrere Modellfunktionen ansetzte und die entsprechenden Konturen zwecks Vergleich mit den Beobachtungen ermittelte. In der vorliegenden Arbeit wird induktiv vorgegangen, indem von der Kontur ausgehend (allerdings unter Benutzung von Modellfunktionen für die Ergiebigkeit) auf die Geschwindigkeitsverteilung geschlossen wird. Verf. vernachlässigt dabei die Schattenwirkung des Sterns (vgl. loc. cit.). Bei merklicher Schattenwirkung sind die Resultate deshalb nur für die kurzweilige Hälfte der Emissionslinien gültig. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Expansionsgeschwindigkeit mit der Entfernung vom Sternzentrum entweder monoton zunimmt oder monoton abnimmt. Schließlich wird wie üblich die Wirkung der Selbstabsorption in der expandierenden Nebelhülle vernachlässigt. Die Betrachtungen können dann in einfacher Weise durchgeführt werden, indem von dem bekannten Resultat ausgegangen wird, daß eine elementare Kugelschale mit der Expansionsgeschwindigkeit  $v$  ein Emissionsband konstanter Intensität von der Breite  $\Delta\lambda = 2v/c$  ergibt. Ein Intensitätszuwachs beim Übergang von einer nach dem Dopplerschen Prinzip der Geschwindigkeit  $v$  entsprechenden Wellenlänge in der Kontur nach der der Geschwindigkeit  $v - dv$  entsprechenden Wellenlänge rührt deshalb von der Emission in der elementaren Kugelschale mit Expansionsgeschwindigkeiten zwischen  $v$  und  $v - dv$  her. Die Ausführungen werden durch Diskussion eines konkreten Falls erläutert. Vollständige und eindeutige Resultate können nicht erwartet werden, bevor eine physikalische Diskussion der Frage der Geschwindigkeitsverteilung oder der Ergiebigkeit vorliegt. Zum Schluß werden Fragen berührt, die damit zusammenhängen, daß bei den Novae der Zustand der Nebelhülle von einem stationären Zustand wesentlich abweichen dürfte.

*B. Strömgren* (Kopenhagen).

**Eddington, A. S.:** The density of interstellar calcium and sodium. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 2—11 (1934).

The author gives a theoretical discussion of the dependence of the intensity of an interstellar line upon the density of the absorbing atoms. The line contour is controlled mainly by ordinary radiation damping, combined with the Doppler effect of the differential velocity of galactic rotation. Consider light coming from a star at distance  $l$  in galactic longitude for which this rotation effect is a maximum. If in a particular line the absorption by interstellar atoms at some point is centred round  $\nu_0$ , then owing to the Doppler effect  $\nu_0$  varies uniformly from (say)  $\nu_1$  to  $\nu_2$  as the point is taken along the length  $l$ . If the density of atoms along  $l$  is constant and equal to  $\varrho$ , the author shows that, as  $\varrho$  is given values increasing from zero, three ranges of these values may be distinguished for which approximately the integrated absorption in the line ( $A$ ) is proportional to  $\varrho$ , ( $B$ ) is independent of  $\varrho$ , ( $C$ ) is proportional to  $\sqrt{\varrho}$ , respectively. In ( $A$ ), ( $B$ ) the absorption is approximately uniform in  $\nu_1$  to  $\nu_2$ , being saturated in ( $B$ ), and negligible for other frequencies. In ( $C$ ) the line extends outside this frequency range owing to the increased importance of "wing absorption". These ranges are connected by relatively small transition ranges. In the cases of  $\text{Ca}^+$ ,  $\text{Na}$  range ( $B$ ) covers about a 500-fold increase in  $\varrho$ . Comparison of numerical values with the author's previous theoretical estimates of  $\varrho$ -values, and with other data, indicates that for



$\text{Ca}^+$  the actual density lies near the upper limit of range *B*, while for  $\text{Na}$  it lies near the lower limit of range *B*. This explains why the interstellar *K*, *H* lines of  $\text{Ca}^+$ , and the *D* lines of  $\text{Na}$ , are observed to be of approximately equal intensity, although the density of  $\text{Ca}^+$  is of the order of 300 times that of  $\text{Na}$ . It thereby provides general confirmation of the author's previous estimates of the density. He further studies the effects of temperature motion of the atoms, and irregular motions of the interstellar cloud. He proposes observational tests which, by determining the variation of the *K*, *H* and *D* lines with galactic longitude, distance, etc., would fix their positions relative to ranges (*A*), (*B*), (*C*), and so yield accurate values of the densities. *W. H. McCrea* (London).

**Strömberg, Gustaf: Formation of galaxies, stars, and planets.** *Astrophys. J.* 80, 327—343 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 9, 134) wird als Ursprung des Sternsystems eine chaotische Gasmasse betrachtet, deren regellose Bewegung durch innere Reibung in eine stetige, quasistationäre Strömung übergehen möge. Die weitere Entwicklung dieser nach hydrodynamischen Gesetzen als kompressible zähe Flüssigkeit zu behandelnden Materie führt im allgemeinen zu einer Kontraktion des Systems im Innern bei gleichzeitigem Materieverlust an der Oberfläche, schließlich zur Bildung eines oder mehrerer Einzelkörper, die bei ursprünglicher Existenz eines Drehmoments im selben Sinn wie das System starr rotieren. Bei axialsymmetrischer Massenverteilung tritt kreisförmige Strömung in einer Symmetrieebene ein; Abweichungen davon sind nur möglich bei Objekten, die vor Herstellung des stationären Zustands entstanden sind (als Beispiele werden die Sterne hoher Geschwindigkeit bzw. die Planetoiden angesehen). Der Fall zweier Kondensationszentren wird zu Spekulationen über die Bildungsmöglichkeit rechläufiger und rückläufiger Satelliten herangezogen. *Wempe* (Göttingen).

**Lindblad, Bertil: On the constitution and development of rotating stellar systems.** *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 95, 12—24 (1934).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 375) hatte Verf. gezeigt, daß in einer rotierenden ringförmigen Wolke materieller Partikel infolge unelastischer Stöße die Streuung der Geschwindigkeiten abnehmen und sich die Materie nach und nach in einer Ebene zu einem flachen Ring konzentrieren wird. In der vorliegenden Arbeit gibt er noch einige Ergänzungen zu diesem Theorem und versucht dann hiermit den Aufbau des Milchstraßensystems und der Spiralnebel qualitativ verständlich zu machen. Insbesondere sucht er die hohe Abplattung der äußeren Teile sowie die Konzentration der interstellaren Materie in der Äquatorebene solcher Systeme zu deuten: Den Schluß der Arbeiten bilden Stabilitätsbetrachtungen, mit denen die Frage der Entstehung der Spiralarme in Zusammenhang steht. *Klauder* (Jena).

## Relativitätstheorie.

● **McCrea, W. H.: Relativity physics.** (Methuen's monogr. on physical subjects.) London: Methuen & Co. Ltd. 1935. VII, 87 S. geb. 2/6.

Dieses kleine Büchlein (87 Seiten in Taschenformat) enthält eine kurze, aber außerordentlich klare Darstellung der speziellen Relativitätstheorie mit Einschluß wichtigster Anwendungen. Verf. beschränkt sich nicht auf die Formulierung der Endergebnisse, sondern legt Wert auf deren Ableitung und auf die Klarstellung des logischen Zusammenhanges zwischen den Grundtatsachen der Theorie. Die Darstellung ist in mathematischer Hinsicht ganz elementar gehalten; der Tensorkalkül wird nicht gebraucht. Das Buch enthält 8 kurze Kapitel: I. Einleitung, II. Lorentztransformation, III. Kinematik, IV. Mechanik, V. Optik, VI. Elektromagnetische Theorie, VII. Atomphysik, VIII. Thermodynamik, statistische Mechanik und Hydrodynamik. Von den Anwendungen sei eine kurze Übersicht der Verwandlungen des Atomkerns (im VII. Kapitel) erwähnt, die als treffliche Illustration des Einsteinschen Gesetzes der Äquivalenz der Masse mit der Energie gewählt sind. — Die leichte Verständlichkeit, Klarheit und zugleich Strenge der Darstellung, die dieses Buch auszeichnen, veranlassen uns, dasselbe einem weiten Leserkreise aufs wärmste zu empfehlen. *V. Fock* (Leningrad).

**Maneff, Georges:** Sur le déplacement du périhélie de Mercure. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1376—1378 (1934).

**Dupont, Yvonne:** Les couples de forces et les moments d'impulsion électromagnétiques dans la gravifique de Th. De Donder. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 773—781 (1934).

**Awano, Tamotsu:** On the unified field theory. II. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 414—422 (1934).

Der Weylschen Theorie der Eichinvarianz ähnlicher Versuch, jedoch mit integrierbarer Längenübertragung (I. s. dies. Zbl. 9, 334). Heckmann (Göttingen).

**Wataghin, G.:** Sull'elettrodinamica relativistica e sull'irraggiamento nell'urto degli elettroni veloci. Nuovo Cimento, N. s. 11, 635—647 (1934).

Verf. hatte in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 8, 380) eine Modifikation des Formalismus der Heisenberg-Pauli-Fermischen Quantenelektrodynamik zwecks Vermeidung der Selbstenergiekatastrophe vorgeschlagen. Diese Modifikation besteht im wesentlichen in einer Abschneidung des Fourierspektrums des Wechselwirkungsoperators, indem eine obere Grenze für die Energieübertragung durch Strahlung (im Ruhssystem des Elektrons) postuliert wird. Dieses Verfahren ist einerseits analog zu Borns und Rumers (dies. Zbl. 1, 310) Einführung einer oberen Grenze für das Frequenzspektrum (ist jedoch relativistisch invariant), andererseits kann es auch, ähnlich der neuen Theorie von Born [dies. Zbl. 7, 234; 8, 138, 184; 90, 184, 422 (mit Infeld)] als eine Modifikation der Maxwell'schen Gleichungen angesehen werden. Verf. berechnet im Rahmen seines Verfahrens die Selbstenergie des Elektrons, behandelt die Bremsstrahlung nach einer von Weizsäcker (dies. Zbl. 9, 92) angewandten Methode und betrachtet zum Schluß qualitativ die Frage der Paarerzeugung. [Fast identisch mit der in der Z. Physik 92, 547 (1934) (dies. Zbl. 10, 188) erschienenen Arbeit. Ref.]

Guth (Wien).

**Infeld, L.:** Dirac's equation in the general relativity theory. Acta Physica Polon. 3, 1—14 (1934).

Die Arbeit schließt sich eng an diejenige von L. Infeld und B. van der Waerden an [S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933; dies. Zbl. 7, 184]. Die Beziehung zwischen dem Spinraum und dem metrischen Raum wird wie dort durch die Größen  $\sigma_{\lambda\mu}^i$  vermittelt, durch welche die Komponenten  $g^{kl}$  des Fundamentaltensors bilinear ausgedrückt werden. Verf. konstruiert eine Lagrangesche Funktion, welche die folgenden Variablen enthält: 1. die Potentiale  $\varphi_k$  des äußeren Feldes; 2. die Potentiale  $f_k$  des Feldes des Elektrons; 3. die Komponenten der Wellenfunktion des Elektrons (zwei 2-komponentige Spinoren  $\psi^\mu$  und  $\chi_\mu$ ); 4. die Größen  $\sigma_{\lambda\mu}^i$ . Mit dieser Lagrangeschen Funktion liefert das Variationsprinzip die Maxwell'schen Gleichungen für das Gesamtfeld (Variation nach  $\varphi_k$ ) und für das äußere Feld (Variation nach  $f_k$ ) sowie die Diracschen Gleichungen (Variation nach  $\psi^\mu$  und  $\chi_\mu$ ) und die Gravitationsgleichungen (Variation nach  $\sigma_{\lambda\mu}^i$ ). Zum Schluß versucht Verf. zu zeigen, daß bei Berücksichtigung der Gravitationswirkungen des Protons die Diracsche Wellenfunktion des Wasserstoffatoms für den Grundzustand auch für  $r = 0$  endlich bleibt; die Betrachtungen des Verf. sind aber hier sowohl in physikalischer als auch in mathematischer Hinsicht nicht einwandfrei.

V. Fock (Leningrad).

**Hoffmann, Banesh:** A modification of Levi-Civita's wave equation. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 268—274 (1934).

Nach Levi-Civita (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933, 240—250; dies. Zbl. 6, 271) betrachtet Verf. die Diracschen  $\Psi$ -Funktionen als Komponenten eines Weltvektors (also kein Spinvektor). Im Gegensatz zu Levi-Civita wird in dieser Arbeit die projektive vierdimensionale Theorie benutzt in der von Veblen und Verf. gegebenen Form. Die Wellengleichung, die nicht linear ist, lautet: Der Affinoranteil von

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Psi^\gamma \quad (\alpha, \dots = 0, 1, 2, 3, 4)$$



verschwindet (d. h. für  $\gamma \neq 0$ ). Die Anwendung der projektiven Theorie hat den Vorteil, daß die Abhängigkeit von dem elektromagnetischen Potentiale automatisch auftritt. Man bekommt dann aber einige Zusatzglieder, die von Verf. diskutiert werden. Die zwei besonderen Fälle, wo nur ein elektrisches bzw. magnetisches Feld vorhanden ist ohne Gravitation, sind ausgearbeitet. *J. Haantjes (Delft).*

**Dantzig, D. van: Electromagnetism, independent of metrical geometry. III. Mass and motion.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 643—652 (1934).

Inhalt der §§ 1, 2, 3, 4: Ein mechanisches System sei durch die Lagrangesche Funktion  $L$  charakterisiert. Der Ausdruck  $dA = L dt$  ist eine homogene Funktion ersten Grades in den Differentialen  $dq^\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, n$ ;  $dq^0 = dt$ ). Die Größen  $p_\lambda = \frac{\partial(dA)}{\partial(dq^\lambda)}$  sind die konjugierten Impulse ( $p_0 = -H$ ). Die Größen  $v^\lambda = \frac{dq^\lambda}{dA}$  kann man als unbekannte Funktionen der Koordinaten  $q^\lambda$  betrachten, die ein Vektorfeld bestimmen; dabei ist  $p_\lambda v^\lambda = 1$ . Die  $p_\lambda$  hängen von den  $q^\mu$  explizite und durch Vermittlung der  $v^\mu$  ab; unter  $\frac{dp_\lambda}{dq^\mu}$  verstehen wir die „totale“ Ableitung nach  $q^\mu$ . Dann können die Bewegungsgleichungen in der Form

$$v^\mu \frac{dp_\lambda}{dq^\mu} + p_\mu \frac{dv^\mu}{dq^\lambda} = 0 \quad (1)$$

geschrieben werden. Die linke Seite von (1) läßt sich nun als die mit Hilfe des Vektorfeldes  $v^\mu$  genommene Liesche Ableitung von  $p_\lambda$  deuten. Da die Liesche Ableitung im Gegensatz zur kovarianten Ableitung von der Metrik unabhängig ist, ergibt die Gl. (1), auf das Problem der Bewegung eines geladenen Massenpunktes angewandt, eine in bezug auf die Metrik invariante Formulierung dieses Problems. — In den vom Vorhergehenden logisch unabhängigen §§ 5 und 6 versucht Verf. den im Ausdruck  $p_i = \dot{j}_i + \frac{e}{c} \varphi_i$  auftretenden Vektor  $\dot{j}_i$  der Bewegungsgröße als gewissen Mittelwert des mit  $\frac{e}{c}$  multiplizierten Potentials  $\dot{\varphi}_i$  des Eigenfeldes des Elektrons, und die Masse des Elektrons als eine Art elektrostatische Wechselwirkungsenergie zu deuten. (I. u. II. vgl. dies. Zbl. **10**, 187.) *V. Fock (Leningrad).*

**Dantzig, D. van: Electromagnetism, independent of metrical geometry. IV. Momentum and energy; waves.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 825—836 (1934).

Verf. schreibt die bekannten Beziehungen  $E = h\nu$ ;  $p = \hbar k$  für ein Lichtquant in der Form

$$\int \mathfrak{W}^h d\mathfrak{S}_h = hc; \quad \mathfrak{W}^h = \mathfrak{S}^{hj} \varphi_j.$$

Zum Schluß werden diese Beziehungen in fünfdimensionaler Weise formuliert.

*V. Fock (Leningrad).*

**Levašov, A.: Zur Frage der Relativisierung der klassischen Mechanik.** I. C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 31—33 u. dtsh. Text 33—35 (1934) [Russisch].

Verf. möchte den, in der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesetzten, metrischen Charakter des Raumes aus physikalischen Forderungen herleiten. In Verfolgung dieses Programms werden (in nicht ganz zwangsläufiger Weise; Ref.) Bewegungsgleichungen aufgestellt, die für die Perihelbewegung des Merkurs dasselbe Resultat ergeben wie die Einsteinsche Theorie. *Guth (Wien).*

**Levašov, A.: Zur Gravitationstheorie.** C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 124—126 u. dtsh. Text 126—129 (1934) [Russisch].

Verf. benutzt den in seiner früheren Mitteilung [C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 31 (1934); vgl. vorst. Referat] vorgeschlagenen Ansatz für die Komponenten des affinen Zusammenhanges:  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + g_{\lambda\mu} a^\nu$  ( $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  Dreiindizesymbole des Euklidischen Raumes,  $a^\nu$  Vektor der Kräftdichte). Der Krümmungsskalar wird in der Theorie des Verf. mit der Materiedichte identifiziert:  $\frac{1}{3} R = \nabla_\alpha a^\alpha + a_\alpha a^\alpha = 4\pi \rho$ . Die Theorie wird auf das Problem der Perihelbewegung des Merkur angewandt. Für die Perihelbewegung pro Jahrhundert bekommt man den Wert 35,8'', der in besserer Über-

einstimmung mit dem von Chazy bestimmten (35'') steht als der Einsteinsche Wert 42,9''.

V. Fock (Leningrad).

Sitter, W. de: On the foundations of the theory of relativity, with special reference to the theory of the expanding universe. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 597 bis 601 (1934).

Versuch, die Voraussetzungen der allgemein relativistischen Theorie des Expanding Universe in Form von wenigen Postulaten zu präzisieren. Heckmann.

Sen, N. R.: On the stability of cosmological models. Z. Astrophys. 9, 215—224 (1934).

In Tolman's investigation (this Zbl. 9, 41) of cosmological models of the spherically symmetric but non-homogeneous type

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - e^{\omega} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (1)$$

( $\lambda, \omega$  functions of  $r$  and  $t$ ), his distorted Einstein and Friedmann models are obtainable from the proper Einstein and Friedmann models by an initial instantaneous change in the density  $\rho$ , but with  $\partial \rho / \partial t$  initially unaltered. (These proper models are referred to below as  $E$  and  $F$  respectively.) The present author considers the behaviour of models which have the same initial density as  $E$  and  $F$  but different  $\partial \rho / \partial t$ , thereby obtaining a slow and continuous transition from  $E$  and  $F$  to models of the type (1). This transition can be produced by a tendency to a spherically symmetric condensation or rarefaction of matter in the case of  $E$ , or to quicker such tendencies than those already present in the case of  $F$ . A tendency to condensation gathers in strength, so  $E$  and  $F$  are unstable for a condensation. A tendency to rarefaction is met at first with gravitational resistance, so that there is an initial appearance of stability, but further investigation shows that the models are in actual fact unstable for rarefactions. An incidental result of some interest is that, of all spaces of the type (1) consistent with given density and metric (and negligible pressure) at an instant of time, the homogeneous Friedmann space has the minimum rate of expansion or contraction.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Drumaux, P.: Sur une condition nécessaire pour la possibilité physique des divers types d'univers. Ann. Soc. Sci. Bruxelles B 54, 224—229 (1934).

## Quantentheorie.

Weyl, Hermann: Observations on Hilbert's independence theorem and Born's quantization of field equations. Physic. Rev., II. s. 46, 505—508 (1934).

Der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz der Variationsrechnung wurde neulich von Born als mögliche Grundlage für die Quantisierung der Feldgleichungen vorgeschlagen [Proc. Roy. Soc. A 143, 410 (1934); dies. Zbl. 8, 138]. Verf. untersucht nun, inwiefern dieser Satz zu diesem Zweck geeignet ist. Im ersten, rein mathematischen Teil A gibt Verf. eine Formulierung des Satzes ( $S$ ) und bespricht dessen Beziehung zum Variationsprinzip ( $V$ ). Verf. betont, daß eine Äquivalenz zwischen ( $S$ ) und ( $V$ ) nur im Falle einer unabhängigen Veränderlichen und einer unbekannten Funktion besteht, während im Falle mehrerer Funktionen und Variablen ( $S$ ) und ( $V$ ) wesentlich verschiedene Aussagen enthalten. Im Teil B wird das von Born vorgeschlagene Quantisierungsschema kritisch analysiert; dasselbe erweist sich als zu eng. Zum Schluß spricht Verf. die Vermutung aus, daß die wellenmechanische Gleichung aus 4 Komponentengleichungen bestehen soll, welche ausdrücken, daß die Ableitungen der Wellenfunktion nach den 4 Weltkoordinaten mit Hilfe der Energie- und Impulsoperatoren gebildet werden müssen.

V. Fock (Leningrad).

Born, Max, et Léopold Infeld: Principes de la nouvelle électrodynamique quantique. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1297—1299 (1934).

Kurze Übersicht der Prinzipien der Bornschen Theorie, mit Einschluß ihrer quantenelektrodynamischen Ausgestaltung.

P. Jordan (Rostock).



**Wentzel, Gregor:** Zur Frage der Äquivalenz von Lichtquanten und Korpuskelpaaren. *Z. Physik* **92**, 337—358 (1934).

Verf. macht den Versuch, die Grundgleichungen der Quantenelektrodynamik aus einem Formalismus abzuleiten, in welchem die elektromagnetischen Feldgrößen als Operatoren auftreten, die die Erzeugung und Vernichtung von Korpuskelpaaren (Paaren von  $L$ -Partikeln) darstellen. Neben diesen  $L$ -Partikeln, die als Ersatz der Lichtquanten dienen, werden gewöhnliche materielle Korpuskeln (etwa Elektronen) betrachtet und als  $M$ -Partikel bezeichnet. Für die Wellenfunktionen der  $L$ - und  $M$ -Partikeln wird ein Gleichungssystem im Konfigurationsraum wechselnder Dimensionszahl aufgestellt, wobei nach dem Vorgang von Dirac [vgl. Dirac, Fock und Podolsky, *Physik. Z. d. Sowjetunion* **2**, 468 (1932); dies. Zbl. **6**, 237] für jedes Teilchen eine besondere Zeitvariable eingeführt wird. Verf. zeigt, daß alle Aussagen des von ihm entwickelten Formalismus, die sich auf die  $M$ -Partikel, auf das Viererpotential und auf die Feldstärken beziehen, mit den Aussagen der „mehrzeitigen“ Theorie von Dirac, Fock und Podolsky (und im Grenzfall zusammenfallender Zeiten mit denen der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik) übereinstimmen. Verf. betont aber, daß er nicht behauptet, der hier versuchte Ansatz sei der einzige, der zu diesem Ziele führt.

V. Fock (Leningrad).

**Alexandrov, A.:** On the quantum conditions and Schrödinger's equation. *C. R. Acad. Sci. URSS* **4**, 198—200 u. engl. Zusammenfassung 201—202 (1934) [Russisch].

Unter einigen allgemeinen Annahmen über den Charakter der quantenmechanischen Beschreibung eines materiellen Teilchens lassen sich aus der Voraussetzung der Gültigkeit der Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte (Ehrenfestscher Satz) die quantenmechanischen Vertauschungsrelationen und die Schrödingergleichung ableiten.

V. Fock (Leningrad).

**Buhl, A.:** Sur quelques analogies corpusculaires et ondulatoires. *Bull. Sci. math.*, II. s. **58**, 333—367 (1934).

Comme à divers occasions (cf. surtout ce Zbl. **6**, 347), l'auteur se propose ici de donner, dans des espaces à canaux, des images pour quelques phénomènes physiques. Voilà l'exemple le plus intuitif. Soit un cercle de rayon  $a$  et de centre  $O$ ; les seules courbes analytiques sur lesquelles deux rayons quelconques  $OA$  et  $OB$  interceptent un arc équivalent à l'arc circulaire  $AB$  sont les cercles, de diamètre  $a$ , passant par  $O$ . Mais il y a une infinité de chemins à points anguleux qui satisfont à l'énoncé initial. L'auteur rapproche ce phénomène au Problème du Déterminisme en disant (p. 338): „Le chemin  $\alpha\beta\epsilon\dots$  n'est nullement déterminé par son premier élément  $\alpha\beta$ . Où va-t-on en partant de  $\alpha$ ? Cela n'est pas encore décidé. C'est exactement la seule réponse que l'on puisse faire lorsqu'on s'interroge sur le comportement d'une trajectoire électronique. Les incertitudes de Heisenberg peuvent aussi être facilement illustrées dans l'ordre d'idées ici examiné...“ Nos courbes donnent lieu encore à beaucoup d'autres développements. Ainsi p. ex. (p. 354): „Voici encore autre chose de tout aussi intéressant. Un cercle dont le rayon  $\varrho$  est très petit et peut même décroître indéfiniment, est traversé par un chemin  $\alpha\beta\epsilon\dots$ ; ce n'est pas en faisant décroître  $\varrho$  que je préciserai l'allure du chemin dans ce cercle. On pourra toujours imaginer que le dit cercle ne contienne pas ou qu'il contienne un point anguleux tel  $\beta$ . C'est encore là une image simple qui me paraît aider grandement à comprendre comment un photon, par exemple, peut se trouver soit dans un état de polarisation unique soit, à la fois, dans deux états de polarisation différents. L'image semble même excellente, les questions de polarisation se ramenant aisément à des questions d'orientation.“

Willy Feller (Stockholm).

**Rumer, G.:** Zur Wellentheorie der Neutrinen. *C. R. Acad. Sci. URSS* **4**, 21—22 u. dtsch. Text 23—24 (1934) [Russisch].

Es wird eine der Diracschen Elektronenwellengleichung analoge Wellengleichung ohne Ruhemaße für das „Neutrino“ vorgeschlagen und gezeigt, wie dieselbe gewisser-

maßen als Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen aufgefaßt werden kann. *O. Klein* (Stockholm).

**Rubinowicz, A.:** Über das Kirchhoffsche Beugungsproblem für Elektronenwellen. *Acta Physica Polon.* **3**, 143—163 (1934).

Verf. untersucht die Beugungserscheinungen der Elektronenwellen (Diracsche kräftefreie Gleichung) von einem Standpunkt, welcher der Kirchhoffschen Beugungstheorie der Optik entspricht. Es wird zunächst eine in einem Punkt singuläre Lösung konstruiert, mit deren Hilfe die vier Diracschen Funktionen innerhalb einer geschlossenen Fläche durch deren Randwerte ausgedrückt werden. Ferner wird die Problemgruppe des Huygensschen Prinzips betrachtet, indem die Integration nicht über eine geschlossene Fläche  $F$ , sondern über eine durch die Kurve  $B$  berandete Fläche  $f$  erstreckt wird. Dann werden die Bedingungen untersucht (Verzweigungseigenschaften, Verhalten auf der Verzweigungskurve  $B$ , Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingungen), welche zur eindeutigen Festlegung einer Lösung der Diracschen Gleichung genügen (Eindeutigkeitsbeweis). Zum Schluß wird die Beugungswelle einer punktförmigen Elektronenquelle ausführlich behandelt. *V. Fock* (Leningrad).

**Sevin, Émile:** Sur le jeu des ondes, du spin et des nombres. *C. R. Acad. Sci., Paris* **199**, 937—939 (1934).

Spekulationen über statistische Deutung der Wellenmechanik. *P. Jordan.*

**Guéhen, G.:** Structure nucléaire et radioactivité artificielle. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **B 54**, 215—223 (1934).

Durchführung der in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **10**, 91) vorgeschlagenen Systematik der bei künstlicher Radioaktivität beobachteten Prozesse durch formelmäßige Darstellung der Anzahlen von  $\alpha$ -Teilchen, Deutonen und Neutronen, aus denen jeder stabile Kern aufgebaut gedacht werden kann. *C. F. v. Weizsäcker.*

**Heller, Gabriel, and Lloyd Motz:** Averages over portions of configuration space. *Physic. Rev., II. s.* **46**, 502—505 (1934).

Verf. geben Reihenentwicklungen für unbestimmte Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} (R_{nl}(r))^2 r^{k+2} dr,$$

wo  $R_{nl}(r)$  die radiale Wellenfunktion des Wasserstoffatoms bezeichnet. Die Resultate werden auf die Berechnung der Verschiebung des Wasserstoffterms angewandt, die entsteht, wenn man in der Schrödingergleichung das Coulombsche Potential  $\frac{1}{r}$  durch

das Born-Infeldsche Potential  $\varphi(r) = \int_0^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}$  ersetzt. Diese Verschiebung erweist sich als un beobachtbar klein. *V. Fock* (Leningrad).

**Jensen, H.:** Ergänzung zur Arbeit: Über den Austausch im Thomas-Fermi-Atom. *Z. Physik* **93**, 232—235 (1935).

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **9**, 383) wurde eine Ableitung der Thomas-Fermischen Gleichung mit Austausch aus einem Variationsprinzip gegeben. Die Anzahl  $n(r)$  der Elektronen pro Volumeinheit gehorcht für  $r < a$  dieser Gleichung und verschwindet für  $r > a$ . Verf. gibt nun ein Verfahren an, nach dem sich die Größe  $a$  (Radius des Atoms) aus der Minimumforderung für die Energie berechnen läßt. Die Gleichung zur Bestimmung von  $a$  lautet:

$$n_{\text{Rand}}^{-1/3} = 7,77 a_H \quad (a_H \text{ Wasserstoffradius}). \quad (1)$$

Die Größe  $n(r)$  ist also für  $r = a$  unstetig. — Die Ergebnisse des Verf. werden ferner mit denen von Brillouin (dies. Zbl. **9**, 383) verglichen. Aus den Annahmen von Brillouin folgt eine zu (1) analoge Gleichung mit dem Koeffizienten 9,70 statt 7,77. *V. Fock.*

**Merrill, Robert A.:** Spectral multiplets belonging to configurations of the type  $d^k ms$  and  $d^k ms ns$ . *Physic. Rev., II. s.* **46**, 487—501 (1934).

In der Säkulargleichung für die Multipletts wird die Störungsenergie als lineare Funktion der skalaren Produkte der Drehimpulsvektoren angesetzt. Und zwar werden



entweder vier Vektoren:  $L$  (Bahndrehimpuls des Atomrumpfes),  $S_d$  (Spin des Atomrumpfes),  $s_m$  und  $s_n$  (Spin des  $m$ s- bzw. des  $n$ s-Elektrons), oder aber die drei Vektoren:  $L$ ,  $S_d$ ,  $s_m$  allein eingeführt. Im ersteren Fall (Viervektorenproblem) wird die Energie gleich

$$H = E + A(L \cdot S_d) + B(S_d \cdot s_m) + C(S_d \cdot s_n) + D(s_m \cdot s_n),$$

im zweiten Fall (Dreivektorenproblem) fehlen die beiden letzten Glieder. Die aus diesem Ansatz folgende Struktur der Multipletts wird analysiert und an verschiedenen Elementen (Y, Cu, Zr, Ni, Co, Fe, Ti, Pd) mit der Erfahrung verglichen, wobei die Konstanten  $A, B, C, D$  empirisch bestimmt werden. V. Fock (Leningrad).

**Bossche, M. van den, et C. Manneback:** Étude des oscillations fondamentales de molécules du type  $X_6$  et  $X_6Y_6$ . Ann. Soc. Sci. Bruxelles B 54, 230—279 (1934).

Als Vorbereitung einer Diskussion der experimentellen Raman- und Ultrarotspektren des Benzols werden die Normalschwingungen von Punktsystemen  $X_6$  und  $X_6Y_6$  betrachtet. Dabei ist  $X_6$  ein ebenes reguläres Sechseck, in dem die Kräfte (entsprechend dem Wechsel von einfacher und doppelter Bindung im Kékulé'schen Modell) nur dreizählige Symmetrie aufweisen. Die auf Grund der Symmetrie vorhandenen Entartungen werden angegeben und der Zusammenhang der Frequenzen mit den Kräften für besondere Hypothesen über die Kräfte (Zentralkraft- und Valenzkraftsystem).

F. Hund (Leipzig).

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Mader, Karl:** Berechnung partieller Geoidhebungen mittels Potentialen von Flächenbelegungen. Gerlands Beitr. Geophys. 43, 280—285 (1934).

An dem Beispiel eines endlichen vier- und dreiseitigen Prismas wird gezeigt, daß bei der Berechnung ihrer Potentiale hinreichend genaue Ergebnisse erhalten werden, wenn die Massen flächenhaft kondensiert werden, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß die Vertikalerstreckung der Massen klein gegenüber ihrer Erstreckung in horizontaler Richtung ist. Hopfner (Wien).

**Gulotta, B.:** Considerazioni sul metodo differenziale in gravimetria. Boll. Com. Geodes. Geofis. Consiglio Naz. Ric., II. s. 4, 114—129 (1934).

Es werden die von Berroth und Meinesz für die relative Schwerkraftmessung vorgeschlagenen Differentialverfahren unter Hinweis auf ihre Vor- und Nachteile und schließlich die Auswirkungen der Veränderung in der Pendellänge durch Gegenüberstellung der nach dem klassischen und differenziellen Verfahren erzielten Ergebnisse besprochen. Der Verf. zeigt sodann die Möglichkeit der Anwendung des Differentialverfahrens auf Pendel von größerer Dämpfung wie die Quarz- und Minimumpendel, die — von ihrer größeren Dämpfung in freier Luft abgesehen — sich durch ihre bekannten Eigenschaften vorteilhaft von den üblichen Bronzependeln unterscheiden. Hierdurch eröffnen sich neue Ausblicke für die Ausgestaltung der relativen Schwerkraftmessung.

Hopfner (Wien).

**Schwinner, Robert:** Sind große Polverschiebungen möglich? Gerlands Beitr. Geophys. 43, 296—308 (1934).

Der Verf. befaßt sich mit zwei in letzter Zeit erschienenen Arbeiten von Milankovitch über die säkulare Verlagerung der Rotationsachse im Erdkörper und bezeichnet seine erste Darstellung (M. Milankovitch, Säkulare Polverlagerungen, Handb. d. Geoph. 1, 438—500. Hrsg. von B. Gutenberg. Berlin 1933) nach eingehender Besprechung als unrichtig, weil die Darstellung gegen das Energieprinzip verstoße; die später gegebene Darstellung [M. Milankovitch, Das Problem der Verlagerungen der Drehpole der Erde in den exakten und in den beschreibenden Naturwissenschaften. Erinnerungen an Alfred Wegener. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 166—188 (1933); vgl. hierzu auch dies. Zbl. 8, 428 und 9, 285] bezeichnet Schwinner zwar als formal einwandfrei, lehnt aber ihre Voraussetzungen, insbesondere die Annahme von der Unveränderlichkeit und Festigkeit der Sialschale und der Polfluchtkraft als Ursache



des Flottierens dieser Schale im Sima, vom Standpunkt der Geologie ab. Bei dieser Gelegenheit bringt der Verf. eine kurze und leicht verständliche mathematische Ableitung der Polfluchtkraft.

*Hopfner* (Wien).

**Milankovitch, M.: Sind große Polverschiebungen möglich? Antwort auf die Bemerkungen von Herrn Schwinner.** Gerlands Beitr. Geophys. 43, 309—310 (1934).

Milankovitch weist gegenüber den von Schwinner (vgl. vorst. Ref.) erhobenen Einwänden darauf hin, daß die mathematische Behandlung der Frage nach den säkularen Verlagerungen der Rotationsachse im Erdkörper ohne vereinfachende Annahmen unmöglich wäre; inwieweit diese Annahmen mit den Erfahrungen der Geologie in Einklang stehen, bleibt der Beurteilung der Geologen überlassen. *Hopfner* (Wien).

**Grabowski, L.: Zur Berechnung der Polfluchtkraft.** Gerlands Beitr. Geophys. 43, 311—324 (1934).

Der von Milankovitch [Der Mechanismus der Polverlagerungen und die sich daraus ergebenden Polkurven. Gerlands Beitr. Geophys. 42, 70—97 (1934); dies. Zbl. 9, 285] gegebenen Formel für die Polfluchtkraft wird vorgeworfen, daß bei ihrer Herleitung das von der Differenz der beiden Hauptträgheitsmomente erzeugte Glied in der Entwicklung der Kräftefunktion der Erde für den Außenraum unberücksichtigt geblieben ist; die Formel wird daher von Grabowski mit Berücksichtigung jenes von Milankovitch unberücksichtigten Gliedes nochmals abgeleitet; hierdurch ergibt sich für die Polfluchtkraft ein Betrag, der doppelt so groß ist wie jener, den Milankovitch berechnete. Gegen dessen Formel wird überdies eingewendet, daß ihr die Entwicklung des äußeren Potentials zugrunde liegt, deren Konvergenz für innerhalb der Erdmasse gelegene Punkte nicht erwiesen sei und die, wenn sie daselbst konvergieren sollte, das innere Potential nicht darstellt. Im zweiten Teil der Arbeit wird Ertels Formel der Polfluchtkraft [H. Ertel, Zur Analyse der Polfluchtkraft. Gerlands Beitr. Geophys. 32, 38—46 (1931); dies. Zbl. 3, 40] vorgeworfen, daß ihr die unrichtige Voraussetzung zugrunde liege, die Anziehungsbeschleunigungen, die sich mit der Zentrifugalbeschleunigung vektoriell zur Schwerkraftbeschleunigung zusammensetzen, seien in jedem Punkt nach dem Erdmittelpunkt gerichtet. G. leitet die Formel im wesentlichen auf dem von Ertel eingeschlagenen Weg unter Vermeidung jener als irrtümlich bezeichneten Annahme ab.

*Hopfner* (Wien).

**Milankovitch, M.: Zur Berechnung der Polfluchtkraft. Antwort auf die Bemerkungen von Herrn Grabowski.** Gerlands Beitr. Geophys. 43, 325—326 (1934).

Den zwischen seiner Formel (Milankovitch, dies. Zbl. 9, 285) für die Polfluchtkraft und jener von Grabowski (vgl. vorst. Ref.) bestehenden Widerspruch um den Faktor  $\frac{1}{2}$  klärt M. dahin auf, daß er der Herleitung der Formel in der zitierten Abhandlung die Annahme einer kugelförmigen Erde zugrunde gelegt habe. Diese Annahme ist für die folgenden Schlüsse deshalb belanglos, weil der von Grabowski beanstandete Faktor  $\frac{1}{2}$  sich später multiplikativ mit einer Konstanten vereinigt, die aus Beobachtungen zu bestimmen ist.

*Hopfner* (Wien).

**Ertel, Hans: Die Berechnung der Polfluchtkraft.** Gerlands Beitr. Geophys. 43, 327—330 (1934).

Der von Grabowski (vgl. vorst. Ref.) erhobene Einwand wird durch den Nachweis zurückgewiesen, daß Ertels Herleitung der Formel für die Polfluchtkraft (Ertel, dies. Zbl. 3, 40) keineswegs die Annahme zugrunde liegt, daß sich die Anziehungsbeschleunigungen im Erdmittelpunkt schneiden, vielmehr nur gefordert wird, daß sich ihre Ziellinien in der Umgebung des Erdmittelpunktes schneiden sollen; selbst wenn für diese Umgebung eine Kugel mit dem Radius von 160 km zugelassen wird, würde Ertels Formel erst einen maximalen Fehler von 1% ergeben. *Hopfner*.

**Venturelli, Lucia: Onde sulla tropopausa. Nota prelim.** Atti Ist. Veneto Sci. etc. 93, 1415—1423 (1934).

In sphärische Polarkoordinaten übertragene Rechnung einer vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 9, 427) durchgeführten Untersuchung der aus einem harmonischen



Geschwindigkeitspotential abgeleiteten barotropen Schwingungen der Stratosphärenbasis (Tropopause). *H. Ertel (Berlin).*

### **Geodäsie:**

**Grossmann, W.: Entwicklung und Transformation ebener querachsiger Koordinaten.** Z. Vermessgswes. **63**, 481—501 u. 529—545 (1934).

Verf. leitet geeignete Gebrauchsformeln ab zur Umwandlung der Anhaltischen (Dessauer) Koordinaten in Gauß-Krügersche Koordinaten und zur umgekehrten Umwandlung. Die Anhaltischen Koordinaten gehen aus einer konformen querachsigen Abbildung des Ellipsoids in der Ebene hervor, die wie folgt definiert ist: Der Nullpunkt des ebenen rechtwinkligen Systems ist das Bild eines festen Nullpunktes  $P_0$  auf dem Erdellipsoid; diejenige geodätische Linie, die den Meridian durch  $P_0$  (Nullmeridian) in  $P_0$  rechtwinklig schneidet, wird durch eine Gerade, die Abszissenachse, dargestellt; jeder Abschnitt dieser geodätischen Linie soll auf der Abszissenachse in wahrer Länge abgebildet werden. Die abgeleiteten Transformationsformeln sind aus Reihenentwicklungen nach Potenzen der Koordinaten bzw. Koordinatenunterschiede entstanden. Die Rechengenauigkeit der Formeln beträgt 1 mm. Zur Kontrolle von Zahlenrechnungen wird Rückumwandlung der Koordinaten empfohlen. *Schmehl (Potsdam).*

**Grossmann, W.: Reihenentwicklungen zur Theorie der Vertikalschnitte.** Z. Vermessgswes. **64**, 33—46 (1935).

Eine größere Zahl von wichtigeren Aufgaben aus der mathematischen Theorie des Erdellipsoids (Umdrehungsellipsoids) läßt sich nur mit Hilfe von Reihenentwicklungen etwa nach Potenzen der Abplattung oder nach Potenzen von Bogenlängen lösen. Mit Rücksicht auf die Verwendung praktischer Messungsergebnisse verdienen die Vertikalschnitte Beachtung. Verf. bestimmt mittels Reihenentwicklungen insbesondere: den Azimut- und den Längenunterschied von Vertikalschnittbogen und geodätischer Linie, den Depressionswinkel und die Länge einer Sehne, den Zentriwinkel eines Normalschnittbogens, den Azimutunterschied zweier Vertikalschnitte (der erste Schnitt enthält die Normale eines Ellipsoidpunktes  $P_1$  und einen zweiten Ellipsoidpunkt  $P_2$ , der zweite die Normale von  $P_2$  und den Punkt  $P_1$ ). Ferner wird eine Formel für den Einfluß der Höhe der Zielpunkte auf die Messung der Horizontalwinkel abgeleitet. Ein Beitrag zur Lösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie, nämlich die Ermittlung der geographischen Breite eines Neupunktes mittels Vertikalschnitt, beschließt die Arbeit. *Schmehl (Potsdam).*

**Buchholtz, A.: Zur Fehlertheorie des Rautenzugs.** Internat. Arch. Photograph. **8**, 1—22 (1934).

Verf. untersucht die mittleren Koordinatenfehler in einem nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Rautenzug, dessen Winkel mit gegebener gleicher Genauigkeit gemessen sind. Den Rautenzug faßt man passend als Polygonzug auf, in dem jede folgende Seite mit der vorhergehenden durch ein Zentralsystem von Dreiecken verbunden ist, so daß jede Polygonseite als Funktion einer in den Rautenzug eingefügten Basis und der in den Polygonpunkten gemessenen ausgeglichenen Winkel dargestellt werden kann; der von den Scheitelpunkten der Winkelmessung gebildete Polygonzug erscheint somit als Rückgrat des Rautenzuges. Unter der Annahme, daß die Genauigkeitsverhältnisse im Rautenzuge im wesentlichen durch jene in diesem Polygonzug gekennzeichnet werden, beschränkt Verf. seine fehlertheoretischen Untersuchungen auf diesen Polygonzug. Vier Fälle werden erledigt: 1. Punktanschluß an beiden Enden des Rautenzuges, 2. Basisanschluß an einem Ende des Zuges, 3. Basisanschluß an einem, Punktanschluß am anderen Ende des Rautenzuges, 4. Basisanschluß an beiden Enden des Rautenzuges. Im 1., 2. und 4. Fall zeigen die Fehlerkurven eine in bezug auf die Zugmitte symmetrische Form, während im 3. Fall, dem ungünstigsten, die Koordinatenfehler etwa proportional der  $1\frac{1}{2}$ -Potenz des Abstandes des betreffenden Polygonpunktes von der Basis wachsen. *Schmehl (Potsdam).*